

# Wie massereich können Schwarze Löcher in Galaktischen Zentren werden?

Diplomarbeit

von

Stephan Deschner

am Institut für Experimentelle Kernphysik (IEKP)

extern betreut am

Institut für Theoretische Physik und Astrophysik (ITAP)

an der Christian-Albrechts-Universität zu Kiel

Referent: Prof. Dr. W. de Boer (IEKP)

Externer Referent: Prof. Dr. W. J. Duschl (ITAP)

Kiel, den 2. Juni 2013



*Ich häufe ungeheure Zahlen,  
Gebürge Millionen auf,  
Ich setze Zeit auf Zeit und Welt auf Welt zu Hauf.*

---

*A. von Haller<sup>0</sup>*

---

<sup>0</sup>gefunden in "Stars and Atoms,, (Eddington, 1927)



# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Einleitung</b>	<b>7</b>
1.1. Über Aktive Galaktische Kerne . . . . .	7
1.2. Die Massenentwicklung eines supermassereichen Schwarzen Loches . . .	9
1.3. Überblick über diese Arbeit . . . . .	10
<b>2. Theoretische Grundlagen</b>	<b>11</b>
2.1. Mathematische Beschreibung von Akkretionsscheiben . . . . .	11
2.1.1. Das erweiterte Modell . . . . .	13
2.1.2. Das Pringle-Modell . . . . .	18
2.2. Die Gravitationsbeschleunigung . . . . .	20
2.3. Der Drehimpulstransport . . . . .	23
2.4. Die Viskositätsparametrisierung . . . . .	26
2.4.1. Das Modell der „ $\alpha$ -Viskosität“ . . . . .	27
2.4.2. Das Modell der „ $\beta$ -Viskosität“ . . . . .	28
2.5. Die Scheibenhöhe $H$ . . . . .	29
2.6. Die Eddington-Akkretionsrate . . . . .	31
2.7. Das Programm <code>hedis</code> . . . . .	33
<b>3. Numerische Tests und ihre Lösungen</b>	<b>39</b>
3.1. Das hydrostatische Problem . . . . .	39
3.2. Der isotherme Vortex . . . . .	40
3.3. Das isotherme Noh-Problem . . . . .	42
3.4. Pringle-Test . . . . .	50
3.5. Umbaumaßnahmen . . . . .	51
3.5.1. Umbau auf echte konservative Variablen . . . . .	51
3.5.2. Erweitern auf zweite Geisterzelle (GZ) und Rekonstruktion . .	54

## Inhaltsverzeichnis

3.5.3.	Anpassen der Randbedingung (RB) . . . . .	55
3.5.4.	Limitier-Funktionen . . . . .	57
3.5.5.	Implizite Zeitschrittberechnung für stationäre Probleme . . . . .	58
<b>4.</b>	<b>Simulationen</b>	<b>61</b>
4.1.	Testergebnisse . . . . .	61
4.1.1.	Das hydrostatische Problem . . . . .	61
4.1.2.	Der isotherme Vortex . . . . .	64
4.1.3.	Das isotherme Noh-Problem . . . . .	71
4.1.4.	Pringle-Test . . . . .	75
4.2.	Das Wachstum eines supermassereichen Schwarzen Loches . . . . .	77
<b>5.</b>	<b>Résumé</b>	<b>87</b>
5.1.	Test-Probleme . . . . .	87
5.2.	Ausblick . . . . .	89
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>91</b>
	<b>Anhang</b>	<b>95</b>
A.	Die Grundgleichungen in Zylinderkoordinaten . . . . .	95
B.	Übergang der $\alpha$ - zur $\beta$ - Viskosität . . . . .	96
C.	Herleitung der Gleichungen des Noh-Problems . . . . .	97
	<b>Liste der Abkürzungen</b>	<b>101</b>
	<b>Danksagung</b>	<b>103</b>
	<b>Erklärung</b>	<b>105</b>

# 1. Einleitung

## 1.1. Über Aktive Galaktische Kerne

Das Zentrum unserer Milchstraße liegt im Sternbild Schütze<sup>1</sup>, Sgr A\* genannt. Beobachtungen innerhalb dieser Region lieferten gleich mehrere Hinweise auf die Existenz eines supermassereichen Schwarzen Loches. So gelang es, die Sternbewegung in der Nähe des innersten Bereiches von Sgr A\* zu vermessen. Aus diesen Daten, also aus der Kinematik der Sterne, die den Kepler-Gesetzen folgt, ließen sich nun Rückschlüsse auf die Masse des Zentrums ziehen.

Weiterhin konnte das aus dem Zentralbereich emittierte elektromagnetische Spektrum aufgenommen werden. Dieses wurde erst in den sechziger Jahren mit Hilfe der Radioteleskopie möglich, da der Zentralbereich stark opak<sup>2</sup> ist und somit den optischen Bereich ausschließt. Das Spektrum zeigt eine Überlagerung aus Synchrotronstrahlung (durch relativistische, geladene Teilchen, die sich in einem Magnetfeld bewegen, verursacht) und Strahlung aus nuklearen Umwandlungsprozessen (Sternspektren).

Vor allem diese beiden Erkenntnisse lassen nun auf ein supermassereiches Schwarzes Loch (SMSL), also eine Punktmasse im Zentrum schließen, das nach Gillessen et al. (2009) eine Masse von  $(4,31 \pm 0,36) \cdot 10^6 M_{\odot}$  mit einer Entfernung<sup>3</sup> von 8,33 kpc zu unserem Sonnensystem aufweist.

Im Unterschied zu Spiral- oder elliptischen Galaxien (beispielsweise ist unsere Milchstraße spiralförmig) gibt es zahlreiche weitere Galaxien, wie zum Beispiel Quasare, Radiogalaxien- oder Seyfertgalaxien, die aber erheblich höhere Leuchtkräfte<sup>4</sup> von  $L_{\text{bol}} \approx 10^{14} L_{\odot}$  (Barth et al., 2003) aufweisen können. Die zuletzt genannten Objekte zählen zur

---

<sup>1</sup>Sgr steht für das lateinische Wort Sagittarius - Schütze

<sup>2</sup>Licht wird von einer umgebenden Staubwolke absorbiert

<sup>3</sup>1 kpc (Kiloparsec) entspricht etwa  $1 \text{ kpc} \hat{=} 3,08 \cdot 10^{16} \text{ km}$ .

<sup>4</sup>Die bolometrische Leuchtkraft ist ein Maß für die Gesamtleuchtkraft eines Himmelskörpers

## 1. Einleitung

Klasse „Aktiver Galaktischer Kern (AGK)“. Quasare sind sehr leuchtkräftige, punktförmige Objekte (ähnlich einem Stern), deren Name sich aus der Bezeichnung Quasi Stellar Radio Source ableitet und wie die Radiogalaxien sehr weit entfernte, junge Objekte sind. Seyfertgalaxien sind die wohl ältesten bekannten Galaxientypen, die den AGK zugeordnet werden können und den Radiogalaxien sehr ähnlich sind. Diese emittieren Strahlung im Radiofrequenzband wobei sie natürlich auch Strahlung in anderen Frequenzbereichen, zum Beispiel im Infrarot, UV oder Röntgenbereich aussenden. Besonders sollen noch einmal die Quasare erwähnt werden. Diese können nach Schmidt (1971) bis zu einigen  $10^{12} M_{\odot}$  aufweisen und bestehen vornehmlich aus einem SMSL im Zentrum<sup>5</sup> mit einer Materiescheibe, der sogenannten Akkretionsscheibe (AS). Eine AS besteht aus Staub und Gas (H, He) und entsteht über einen Kollaps von einer ursprünglich sphärischen Materieverteilung bedingt durch die Drehimpulserhaltung zu einer flachen Scheibe, was in Eggen et al. (1962) beschrieben wird.

Es soll nun die Frage nach den extrem hohen Leuchtkräften geklärt werden. Erste Ideen zu einem Mechanismus dazu wurden bereits von Weizsäcker (1944) und Lüst (1952) vorgeschlagen. Sie beschrieben den Transport von Materie innerhalb einer AS. Dabei besteht die Schwierigkeit darin, dass sich Gravitations- und Zentripetalkraft das Gleichgewicht halten und sich die Materie somit auf festen Orbits um das Schwarze Loch (SL), aber nicht zu ihm hin bewegt. Führt man jedoch Reibung ein, kann ein Umverteilungsprozeß gestartet werden, der den Drehimpuls nach außen, die Masse aber nach innen leitet (siehe Abschnitt 2.3). Damit kann das SL nun wachsen und gleichzeitig Strahlung emittieren. Diese durch molekulare Viskosität erzeugte Strahlung ist aber wiederum zu schwach um die hohen Leuchtkräfte zu erklären. Da turbulente Phänomene in der AS eine zentrale Rolle spielen, sollten diese berücksichtigt werden. Ein Vorschlag dazu beruht auf dem Modell mit **turbulenter Viskosität** (siehe Abschnitt 2.4). Dieses Modell führt zu guter Übereinstimmung zwischen Beobachtung und Simulation eines AGK bezüglich des emittierten Spektrums innerhalb der relevanten Zeitskalen. Gleichzeitig erzeugt man dadurch auch einen Widerspruch (Hasinger et al., 2005), das sogenannte „Antihierarchische Wachstum von SMSL“. Denn häufig ist es so, dass gerade sehr junge Galaxien, also sehr rotverschobene<sup>6</sup>  $z \approx 6$  bereits größere Massen

---

<sup>5</sup>Es ist eher eine Ausnahme, eine Galaxie ohne SMSL zu finden.

<sup>6</sup>Die aufgenommenen Spektren sind leicht ins Rote, also zu kürzeren Wellenlängen hin verschoben worden. Dieser Effekt entsteht durch die Expansion des Universums. Da sich Licht nur mit einer end-



## 1.2. Die Massenentwicklung eines supermassereichen Scharzen Loches

aufzeigen, als sehr viel ältere. Es kann dies kann über die Leuchtkräfte gezeigt werden, die über den Akkretionsmechanismus entstehen. Ein solches Paradoxon konnte von Duschl & Strittmatter (2011) ausgeräumt werden, indem ein spezielles turbulentes Viskositätsmodell (Duschl et al., 2000) zur Erklärung verwendet wurde (siehe Abschnitt 2.4). Diese Parametrisierung bringt die beschriebene sehr schnelle Massenentwicklung auf verifizierbare Zeitskalen, ohne die Art des Spektrums zu verändern.

## 1.2. Die Massenentwicklung eines supermassereichen Scharzen Loches

In dieser Arbeit soll die Frage nach einer möglichen Massenobergrenze eines SMSL beantwortet werden. Die Massenobergrenze soll hier aber nicht von der Zeit abhängen. Gäbe es eine solche Grenze, könnte sie kein echtes Maximum darstellen, sondern würde einen „Sättigungsbereich“ der Schwarzlochmasse angeben, der einfach dadurch zustande kommt, dass das Material in der AS aufgebraucht ist (wie zum Beispiel im Zentralbereich der Milchstraße). Betrachtet man nun die eigentliche Massenbilanz eines AGK

$$M_{\bullet,f} = M_{\bullet,i} + M_{D,i} - \Delta M_{\text{Edd}}, \quad (1.1)$$

wobei  $M_{D,i}$  die initiale Scheibenmasse,  $M_{\bullet,i}$  die initiale SL-Masse,  $M_{\bullet,f}$  die finale und  $\Delta M_{\text{Edd}}$  die sogenannten Eddington-Verlustmasse (siehe Abschnitt 2.6) ist, fällt auf, dass das Wachstum über das Verhältnis initiale Scheibenmasse zu Eddingtonverlust beschränkt sein könnte. Weil  $\Delta M_{\text{Edd}} = \Delta M_{\text{Edd}}(M_{\bullet})$  eine Funktion der Schwarzlochmasse ist und diese wiederum stark von der Scheibenmasse abhängt, wird die Scheibenmasse wichtigster Parameter, um ein Maximum zu finden. Dafür bildet man nun die erste Ableitung der Massenbilanz nach der initialen Scheibenmasse

$$\frac{dM_{\bullet,f}}{dM_{D,i}} = \frac{dM_{\bullet,i}}{dM_{D,i}} - \frac{d\Delta M_{\text{Edd}}}{dM_{D,i}} + 1 = 0$$

und betrachtet ihr Verhalten innerhalb einer vorgegebenen Zeit und unter Variation weiterer Parameter die das Wachstum sehr beeinflussen, wie die Viskosität und der Außen-

---

lichen Geschwindigkeit ausbreiten kann, benötigt das von sehr weit entfernten Objekten ausgesandte Licht sehr lange bis es uns erreicht. Deshalb beobachtet man diese zum Zeitpunkt ihrer Entstehung.

## 1. Einleitung

radius der Scheibe (Abschnitt 4.2).

Werkzeug ist hierfür das Programm `hedis`. Es simuliert die Entwicklung eines AGK, indem es die hydrodynamischen Grundgleichungen löst (siehe dazu Kapitel 2) und daraus indirekt die Massen und Massenflüsse bestimmt. Da die hydrodynamischen Grundgleichungen im Allgemeinen keine analytische Lösung besitzen müssen diese in `hedis` numerisch gelöst werden.

### 1.3. Überblick über diese Arbeit

Nachdem die theoretischen Grundlagen und die Mathematik zur Bearbeitung des vorliegenden Problems hergeleitet werden (Kapitel 2), wird besonders auf unterschiedliche numerische Testverfahren (Kapitel 3) eingegangen. Diese sind notwendig um die Funktionsweise von `hedis` zu gewährleisten und die Güte des Codes zu überprüfen. Es zeigt sich, dass der Code unter Verwendung des erweiterten Modells (siehe Abschnitt 2.1.1) und geringer Viskosität zum Abbruch führt, da die Lösungen ohne physikalische Ursache divergieren. Genauer kann man dies folgendermaßen zusammenfassen:

*Ändert sich der Charakter der Gleichung von stark diffusiv zu stark advektiv, können die Erhaltungseigenschaften der Grundgleichungen nicht mehr gewährleistet werden*

Nachdem der Umbau von `hedis` vorgestellt und begründet wird (Abschnitt 3.5), werden die Testverfahren analysiert. Diese zeigen fast ausschließlich weitreichende Verbesserungen des Codes in Bezug auf numerische Stabilität und Erhaltung der einzelnen physikalischen Größen. Das erweiterte Modell unterliegt aber immer noch Fehlerquellen, weshalb die Simulationen zur Themenfrage mit dem Pringle-Modell erzeugt und vorgestellt werden. Zum Schluss werden die Ergebnisse diskutiert und das Thema nochmals zusammengefasst um einen Ausblick auf aufgeworfenen Fragen geben zu können.

## 2. Theoretische Grundlagen

In diesem Abschnitt werden ausgehend von den hydrodynamischen Grundgleichungen zwei unterschiedliche Modelle zur zeitlichen Entwicklung von AGK hergeleitet. Aufgrund der physikalischen Aussagekraft soll in dieser Arbeit ein sogenanntes **erweitertes Modell** (Abschnitt 2.1.1) Anwendung finden, wobei das **Pringle-Modell** (Abschnitt 2.1.2) schneller relevante Ergebnisse liefert. Weiterhin werden grundlegende Zusammenhänge beschrieben. Es wird besonders auf den Drehimpulstransport (Abschnitt 2.3) und die Viskosität (Abschnitt 2.4) eingegangen und darauf aufbauend werden weitere nötige Größen abgeleitet. Wesentliche Rechenschritte sind im Anhang zu finden und an den entsprechenden Stellen angegeben.

### 2.1. Mathematische Beschreibung von Akkretionsscheiben

Die Dynamik in einer Akkretionsscheibe ist durch Gas dominiert und kann deshalb als Fluid aufgefasst werden. Die mathematische Formulierung geht somit auf die hydrodynamischen Grundgleichungen in allgemeinen Koordinaten zurück, wobei im Folgenden auf eine detaillierte Ableitung verzichtet, aber auf die mehr heuristische Herleitung in Landau & Lifšic (1974) oder auf die Herleitung aus der sogenannten „Momentengleichung für Erhaltungsgrößen“ in Shu (1992) verwiesen wird. Aufgrund der Massenerhaltung gilt die **Kontinuitätsgleichung**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0. \quad (2.1)$$

## 2. Theoretische Grundlagen

Hierbei steht  $\rho$  für die Massendichte und  $\vec{v}$  für die Strömungsgeschwindigkeit. Um die Impulserhaltung (IEH) zu beschreiben wird die **Navier-Stokes-Gleichung** verwendet

$$\frac{\partial(\rho\vec{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\vec{v} \otimes \vec{v} + P\mathbb{1}) - \nabla \cdot \vec{\sigma} + \rho\nabla\Phi = 0. \quad (2.2)$$

Diese Gleichung ist eine Tensorgleichung mit dem dyadischen Produkt  $\otimes$ ,  $P$  steht für den Druck,  $\mathbb{1}$  ist die Einheitsmatrix und  $\Phi$  steht für das Gravitationspotential. Der viskose Spannungstensor  $\vec{\sigma}$  ist sehr wichtig für den Drehimpulstransport (siehe Abschnitt 2.3) und kann in kartesischen Koordinaten über

$$\sigma_{ik} = \eta \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) + \zeta \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \quad (2.3)$$

angegeben werden. Dabei steht  $\zeta$  für die Dehn- und  $\eta$  für die Scherviskosität, beziehungsweise für die dynamische Viskosität. Man erkennt, dass der Tensor bei konstanten Geschwindigkeiten verschwinden würde. In einem Fluid kann das aber nur in Spezialfällen der Fall sein, weshalb immer Scherkräfte entstehen, die den stationären Zustand des Systems stören. Der Spannungstensor beschreibt also anhand der Geschwindigkeitsgradienten, wie sich Scherkräfte in einem Fluid verhalten. Zur vollständigen Beschreibung eines hydrodynamischen Systems benötigt man noch eine Gleichung für die **Energieerhaltung**:

$$\frac{\partial(\rho\varepsilon)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\varepsilon\vec{v}) + P\nabla \cdot \vec{v} + \nabla \cdot \vec{F} - \Psi = 0. \quad (2.4)$$

Hier ist

$$e = \rho\varepsilon \equiv \rho \left\langle \frac{1}{2} |\vec{w}|^2 \right\rangle = \frac{3}{2}P$$

die innere Energiedichte,

$$\vec{F} \equiv \rho \left\langle \vec{w} \frac{1}{2} |\vec{w}|^2 \right\rangle$$

der Wärmefluss,

$$\Psi \equiv \sigma_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k}$$

die viskose Dissipationsrate und  $\langle \cdot \rangle$  steht für eine Mittelwertbildung. Die Größe  $\vec{w}$  beschreibt eine innere Geschwindigkeit des Fluids.

## 2.1. Mathematische Beschreibung von Akkretionsscheiben

Mit den drei Gleichungen Masse-, Impuls- und Energieerhaltung kann nun die Bewegung eines Fluids im innern einer AS beschrieben werden, wobei es mathematisch gesehen nahe liegt Zylinderkoordinaten zu verwenden. Die so transformierten Gleichungen sind in Anhang A über Gl. (A.1) - Gl. (A.4) angegeben. Weiterhin wird in dieser Arbeit die Energiegleichung nicht betrachtet, da man sie über die Isothermiebedingung

$$P = c_s^2 \cdot \rho \quad (2.5)$$

sozusagen von der Navier-Stokes-Gleichung entkoppeln kann. Diese Aussage stimmt aber nur insofern, weil durch die Isothermiebedingung die innere Energie ( $\rho\varepsilon$ ) in Gl. (2.4) zeitlich und räumlich konstant wird. Somit kann man eine Gleichgewichtslösung angeben, wodurch kein Energietransport mehr stattfindet, und Gl. (2.4) nicht mehr berechnet werden muss. Es steht  $P$  für den Druck und  $c_s$  für die (isotherme) Schallgeschwindigkeit. Diese Annahme ist im Allgemeinen zwar eher untypisch, liefert aber hinreichend gute Ergebnisse, so dass sie sich speziell für ein implizites numerisches Verfahren anbietet, was von Blank (2010) gezeigt wurde.

### 2.1.1. Das erweiterte Modell

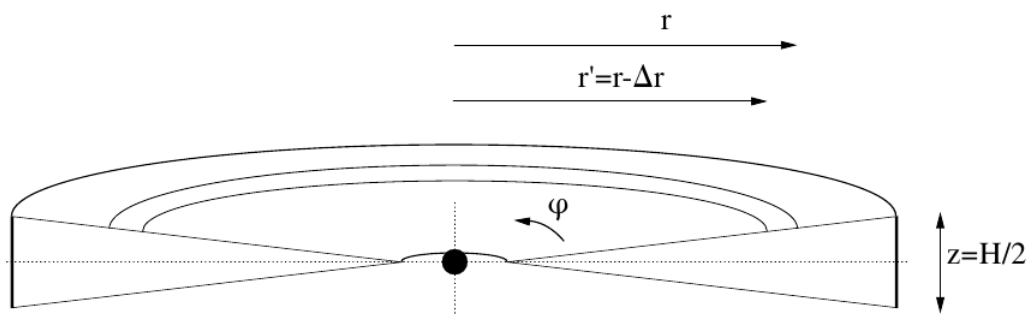


Abbildung 2.1.: Querschnitt durch eine AS, die sich nach außen hin öffnet (siehe Abschnitt 2.5) mit den geometrischen Größen  $r$ ,  $\varphi$  und  $z$

Nach Shakura (1972) soll das Scheibenmodell eine geometrisch dünne Scheibe be-

## 2. Theoretische Grundlagen

schreiben, was zu einem Verhältnis (Scheibendicke  $H$  zu Radius  $r$ )

$$H/r \ll 1 \quad (2.6)$$

führt. Diese AS wird als axialsymmetrisch um die  $z$ -Achse

$$\frac{\partial \cdot}{\partial \varphi} = 0 \quad (2.7)$$

angenommen und es befindet sich ein SL im Zentrum. Abbildung (2.1) stellt eine AS dar, wobei zu beachten ist, dass sich die Scheibe nach außen hin leicht öffnet. Die Erklärung hierfür wird in Abschnitt 2.5 gegeben, kann aber aufgrund ihrer radialen Ausdehnung, also wegen Gl. (2.6), vernachlässigt werden. Gl. (2.1) und Gl. (2.2) sind in Anhang A in Zylinderkoordinaten umgerechnet angegeben. Mit der Annahme Gl. (2.7) wird die Kontinuitätsgleichung Gl. (A.1) dann zu

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho v_r) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) = 0. \quad (2.8)$$

Die Impulsgleichung, aufgespalten in  $r$ ,-  $\varphi$ - und  $z$ - Richtung, Gl. (A.2) bis Gl. (A.4), zu

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\varphi^2}{r} = -\frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{\rho r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_{rr}) - \frac{\sigma_{\varphi\varphi}}{\rho r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{v_r v_\varphi}{r} = \frac{1}{\rho r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sigma_{\varphi r}) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{\varphi z}}{\partial z} \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{\rho r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_{zr}) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}. \quad (2.11)$$

Die Energiegleichung wird hier bereits nicht mehr berücksichtigt. Da man nach Gl. (2.6) eine dünne Scheibe betrachtet, kann die Dichte  $\rho$  mit der Oberflächendichte  $\Sigma$

$$\rho(r, z) = \Sigma(r) \cdot \delta(z) \quad \Rightarrow \quad \Sigma(r) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(r, z) dz \quad (2.12)$$

und der  $\delta$ -Funktion ausgedrückt und dadurch auch alle Terme mit der Geschwindigkeit  $v_z$  vernachlässigt werden. Man erhält nun aus Gl. (2.8)-Gl. (2.11) und dem viskosen

## 2.1. Mathematische Beschreibung von Akkretionsscheiben

Spannungstensor in Zylinderkoordinaten Gl. (A.5) die vier Ausdrücke

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Sigma \delta(z)) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \Sigma \delta(z) v_r) = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\Sigma \delta(z) v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \Sigma \delta(z) v_r + r c_s^2 \Sigma \delta(z)) - \frac{\Sigma \delta(z) v_\varphi^2}{r} + \frac{c_s^2 \Sigma \delta(z)}{r} = \\ -\Sigma \delta(z) \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ 2\eta r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \left( \zeta - \frac{2}{3} \eta \right) \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) \right] \\ - \frac{1}{r} \left[ 2\eta \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r} \left( \zeta - \frac{2}{3} \eta \right) \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left( \eta \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\Sigma \delta(z) v_\varphi) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \Sigma \delta(z) v_r v_\varphi) + \frac{\partial}{\partial z} (\Sigma \delta(z) v_z v_\varphi) + \frac{\Sigma \delta(z) v_r v_\varphi}{r} = \\ - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \eta \left( \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} \right) \right] - \frac{\eta}{r} \left( \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \eta \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\Sigma \delta(z) v_z) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \Sigma \delta(z) v_r v_z) + \frac{\partial}{\partial z} (\Sigma \delta(z) v_z^2 + c_s^2 \Sigma \delta(z)) + \Sigma \delta(z) \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \eta \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{1}{r} \left( \zeta - \frac{2}{3} \eta \right) \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) \right]. \end{aligned}$$

Diese vier Gleichungen werden nun in  $z$ -Richtung von  $-\infty$  bis  $\infty$  integriert, wobei die Oberflächendichte aus Gl. (2.12) verwendet werden muss. Dieser Schritt ist wieder durch Gl. (2.6) gerechtfertigt und wird die Rechenzeit in `hedis` enorm verkürzen. Durch diese Maßnahme wird das dreidimensionale Problem zu einem zweidimensionalen reduziert. Die Symmetrieannahme Gl. (2.7) reduzierte das System auch um eine Dimension. Das eigentlich eindimensionale System hat aber immer noch eine Abhängigkeit von der Geschwindigkeit  $v_\varphi$ , weshalb man streng genommen von einem „**1 + eindimensionalen Problem**“ sprechen müsste (siehe Abschnitt 2.7). Darüber hinaus müssen jetzt die über  $z$  integrierten Viskositäten

$$\bar{\zeta} = \int_{-\infty}^{\infty} \zeta dz, \quad \bar{\eta} = \int_{-\infty}^{\infty} \eta dz$$

## 2. Theoretische Grundlagen

und das Gravitationspotential in radialer Richtung bei  $z = 0$

$$g = - \left( \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)$$

verwendet werden. Schreibt man diese Gleichungen jetzt noch um (Blank, 2010), gelangt man zu den drei wichtigen Grundgleichungen:

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \Sigma v_r) = 0 \quad (2.13)$$

für die **Massenerhaltung**,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (\Sigma v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r \Sigma (v_r^2 + c_s^2)] - \Sigma \left( \frac{v_\varphi^2}{r} + \frac{c_s^2}{r} + g \right) \\ & - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \left( \bar{\zeta} + \frac{4}{3} \bar{\eta} \right) r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \left( \bar{\zeta} - \frac{2}{3} \bar{\eta} \right) v_r \right] + \left( \bar{\zeta} + \frac{4}{3} \bar{\eta} \right) \frac{v_r}{r^2} + \left( \bar{\zeta} - \frac{2}{3} \bar{\eta} \right) \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} = \end{aligned} \quad (2.14)$$

für die **Impulserhaltung (IEH)** und

$$\frac{\partial}{\partial t} (r \Sigma v_\varphi) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \Sigma v_r v_\varphi) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \bar{\eta} \left( \frac{\partial}{\partial r} (r v_\varphi) - 2 v_\varphi \right) \right] = 0 \quad (2.15)$$

für die **Drehimpulserhaltung (DEH)**. Diese Bezeichnungen lassen sich über die Größen innerhalb des zeitlichen Anteils der Gleichungen rechtfertigen, also wenn man  $\Sigma v_r$  als Impuls- und  $r \Sigma v_\varphi$  als Drehimpulsdichte auffasst. Man hat nun eine gewisse Freiheit darin, wie man im weiteren vorgeht, um aus den drei Gleichungen nur noch eine **“Zustandsvektorgleichung”**

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{F}(\vec{u})}{\partial r} - \frac{\partial \vec{V}(r, \vec{u}, \vec{u}')}{\partial r} - \vec{W}(r, \vec{u}, \vec{u}') - \vec{S}(r, \vec{u}) = 0 \quad (2.16)$$

mit den im Folgenden zu definierenden Zustandsvektoren zu generieren. Ursprünglich wurden obige Gleichungen mit dem Radius  $r$  multipliziert, um damit die **Variablen**

$$\vec{u} \doteq \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \Sigma \\ r \Sigma v_r \\ r^2 \Sigma v_\varphi \end{pmatrix} \quad (2.17)$$



## 2.1. Mathematische Beschreibung von Akkretionsscheiben

zu erhalten. Es wird sich später zeigen, dass diese Wahl es zwar ermöglicht, einfache Umrechnungen durchzuführen, sich aber als ungeschickt erweist, wenn man auf Erhaltungsgrößen rechnen will. Dies wird dann in Abschnitt 3.5.1 tiefergehend behandelt. Des Weiteren definiert man den **Flussvektor**

$$\vec{F}(\vec{u}) \doteq \begin{pmatrix} r\Sigma v_r \\ r\Sigma(v_r^2 + c_s^2) \\ r^2\Sigma v_r v_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 + \left(\frac{u_2^2}{u_1^2} + c_s^2\right) \\ \frac{u_2 u_3}{u_1} \end{pmatrix}, \quad (2.18)$$

den **viskosen Fluss**

$$\begin{aligned} \vec{V}(r, \vec{u}, \vec{u}') &\doteq \begin{pmatrix} 0 \\ (\bar{\zeta} + \frac{4}{3}\bar{\eta}) r \frac{\partial v_r}{\partial r} + (\bar{\zeta} - \frac{2}{3}\bar{\eta}) v_r \\ \bar{\eta} \left( r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - 2r v_\varphi \right) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ (\bar{\zeta} + \frac{4}{3}\bar{\eta}) r \frac{\partial u_2}{\partial r} + (\bar{\zeta} - \frac{2}{3}\bar{\eta}) \frac{u_2}{u_1} \\ \bar{\eta} \left( r \frac{\partial u_3}{\partial r} - 2 \frac{u_2}{u_1} \right) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.19)$$

den **Quellterm**

$$\vec{S}(r, \vec{u}) \doteq \begin{pmatrix} 0 \\ r\Sigma \left( \frac{v_\varphi^2}{r} + \frac{c_s^2}{r} + g \right) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ u_1 \left( \frac{u_3^2}{r u_1^2} + \frac{c_s^2}{r} + g \right) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.20)$$

und den **viskosen Quellterm**

$$\begin{aligned} \vec{W}(r, \vec{u}, \vec{u}') &\doteq \begin{pmatrix} 0 \\ -(\bar{\zeta} + \frac{4}{3}\bar{\eta}) \frac{v_r}{r} - (\bar{\zeta} - \frac{2}{3}\bar{\eta}) \frac{\partial v_r}{\partial r} \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ -(\bar{\zeta} + \frac{4}{3}\bar{\eta}) \frac{u_2}{r u_1} - (\bar{\zeta} - \frac{2}{3}\bar{\eta}) \frac{\partial u_2}{\partial r} \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Alle Zustandsvektoren sind in analytischer Form und mit den Variablen  $\vec{u}$  umgerechnet

## 2. Theoretische Grundlagen

angegeben. Dieses Gleichungssystem bildet zusammen mit der isothermen Schallgeschwindigkeit  $c_s$  und den Viskositäten  $\bar{\zeta}$  und  $\bar{\eta}$  ein geschlossenes Gleichungssystem, das numerisch mit `hedis` gelöst werden kann.

Da in dieser Arbeit eine Massengrenze für SMSL gesucht wird, soll die Berechnung der Massen und der Massenflüsse noch abgeleitet werden. Die Scheibenmasse berechnet man innerhalb eines Ringes mit  $\Delta r \ll r$  (siehe Abbildung (2.1)) in der Scheibenebene zu

$$\Delta M_D(r) = \int_0^{2\pi} \int_r^{r+\Delta r} \int_{-\infty}^{\infty} \rho dV \approx 2\pi r \Delta r \int_{-\infty}^{\infty} \rho dz \stackrel{\text{Gl. (2.12)}}{=} 2\pi r \Delta r \Sigma. \quad (2.22)$$

Ersetzt man in Gl. (2.1)  $\rho = \frac{M}{V}$  mit der Masse aus Gl. (2.22), kann der Massenfluss

$$\dot{M} \doteq -2\pi r v_r \Sigma \quad (2.23)$$

definiert werden (Kato et al., 2008). Die Schwarzschildmasse  $M_\bullet$  nimmt natürlich zu, wenn die Scheibenmasse abnimmt und ein Massenfluss Richtung SL vorliegt. Legt man einen Startwert für  $M_{\bullet,i}$  und  $M_{D,i}$  fest, kann die Massenbilanz aus Gl. (1.1) mit Ausnahme der Eddington-Verlustmasse aufgestellt werden. Diese wird in Abschnitt 2.6 eingeführt.

Zuletzt wird noch die Geschwindigkeit eines Fluidelements innerhalb der Scheibe angegeben. Dieses bewegt sich auf einem kreisbahnähnlichen Orbit um und in Richtung des Zentrums (Viskosität) mit

$$\Omega(r) = \sqrt{\frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr}} \stackrel{M_D \ll M_\bullet}{=} \sqrt{\frac{GM_\bullet}{r^3}}, \quad (2.24)$$

beziehungsweise mit der azimuthalen Geschwindigkeitskomponente  $v_\varphi = r\Omega$ . In Sonderfällen (siehe Abschnitt 2.2) kann auch die Kepler-Geschwindigkeit (rechter Term in Gl. (2.24)) herangezogen werden.

### 2.1.2. Das Pringle-Modell

Das Modell nach Pringle (1981) ist ein sehr vereinfachtes Rechenmodell. Es werden zusätzlich noch folgende Annahmen und Näherungen gemacht:

## 2.1. Mathematische Beschreibung von Akkretionsscheiben

- $|v_r| \ll v_\varphi$ : Die Radialgeschwindigkeit ist  $v_r \propto \frac{\nu}{r}$  und daher immer sehr klein gegenüber der Azimutalgeschwindigkeit (siehe Abschnitt 2.3).
- $c_s \ll v_\varphi$ : Da Kepler-Geschwindigkeit<sup>1</sup>  $\Omega = \Omega_K$  gelten soll, muss der Druckgradient aus der Impulsgleichung Gl. (2.14) verschwinden. Mit der Machzahl  $\text{Ma} = \frac{v_\varphi}{c_s}$  und Gl. (2.5) kann diese nun abgeleitet werden (Pringle, 1981).
- $\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} = 0$ : Wegen  $M_D \ll M_\bullet$  wird die Zentralmasse als zeitlich konstant genähert, woraus diese Bedingung für die Azimutalgeschwindigkeit folgt (siehe Abschnitt 2.3).

Wendet man diese Näherungen auf Gl. (2.13), Gl. (2.14) und Gl. (2.15) an, so ändert sich an der Kontinuitätsgleichung zunächst nichts. Die Impulsgleichung vereinfacht sich zu einem Gleichgewichtszustand

$$v_\varphi^2 = -r \frac{\partial \Phi}{\partial r},$$

und von der Drehimpulsgleichung bleiben die Terme

$$rv_\varphi \frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \Sigma v_r v_\varphi) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \bar{\eta} \left( \frac{\partial}{\partial r} (rv_\varphi) - 2v_\varphi \right) \right] = 0$$

übrig. Den zweiten Term in der letzten Gleichung kann man partiell ableiten. Setzt man nun die nach der Oberflächendichte umgestellte Kontinuitätsgleichung zusammen mit der Impulsgleichung darin ein, so erhält man anstatt des Gleichungssystems aus drei Gleichungen nur noch eine Entwicklungsgleichung

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \bar{\eta} \frac{\partial (rv_\varphi)}{\partial r} - 2v_\varphi \right)}{\frac{\partial (rv_\varphi)}{\partial r}} \right] = 0. \quad (2.25)$$

Diese Entwicklungsgleichung kann unter bestimmten Voraussetzungen wie z.B. Kepler-Gravitation und einer ortsabhängigen Viskosität ( $\nu \propto -r^{3/2}$ ) analytisch gelöst werden und dadurch als Referenzmodell dienen (Kato et al., 2008). Der große Vorteil des Pringle-Modells liegt in seiner Einfachheit. Nach Blank (2010) sind im Vergleich mit dem erweiterten Modell und mit dem Programm `fosite`<sup>2</sup> nur kleine Abweichungen zu

<sup>1</sup>Gleichgewicht zwischen Zentrifugal- und Gravitationskraft (Punktmasse)

<sup>2</sup>Programm zur Lösung hyperbolischer Erhaltungsgleichungen in allgemeinen Koordinaten siehe Illenseer (2006)

## 2. Theoretische Grundlagen

erkennen. Der Nachteil wiederum liegt darin, dass unter den vielen Annahmen die Aussagekraft leidet, da in diesem Modell viele wichtige Parameter einfach nur angenähert anstatt explizit numerisch berechnet werden.

### 2.2. Die Gravitationsbeschleunigung

Das Gravitationspotential  $\Phi$  in den Grundgleichungen ist in den klassischen Modellen, beispielsweise nach Shakura (1972), ein sphärisches Potential, das der Poisson-Gleichung genügen muss. In diesen Modellen ist die Zentralmasse, beziehungsweise die Schwarzmlochmasse  $M_{\bullet}$  viel größer als die Masse der Scheibe  $M_D$ . Allgemein gilt für die Gravitationsbeschleunigung auf die Zentralmasse

$$\vec{g}_{\bullet} = \vec{\nabla}\Phi_{\bullet} = -\frac{GM_{\bullet}}{r^2}\vec{e}_r.$$

Erste Untersuchungen von Trefftz (1952) über rotierende Gasscheiben und später von Cattaneo et al. (2005) über AGK haben jedoch gezeigt, dass die Masse der Scheibe  $M_D \approx 10^{10} M_{\odot}$  die Masse des vor allem noch jungen zentralen Objektes  $M_{\bullet} \approx 10^4 M_{\odot}$  übersteigen kann. In diesen Systemen ist also die von der Scheibe ausgehende Gravitationskraft nicht mehr zu vernachlässigen weshalb man nun von **selbstgravitierenden Scheiben** ( $M_{\bullet} < M_D$ ) spricht. Dabei können weitere Fälle unterschieden werden (Duschl et al., 2000).

Art der Gravitation	Klassifikation
NSG: nicht selbstgravitierend	$M_D \ll M_{\bullet} \frac{H}{r}$
KSG: Keplersch selbstgravitierend	$M_{\bullet} \frac{H}{r} \ll M_D \ll M_{\bullet}$
FSG: voll (full) selbstgravitierend	$M_{\bullet} \ll M_D$

Abbildung 2.2.: verschiedene Arten der Gravitation

Damit setzt sich die gesamte Gravitationsbeschleunigung jetzt zusammen aus

$$\vec{g} = \vec{g}_{\bullet} + \vec{g}_D, \tag{2.26}$$

## 2.2. Die Gravitationsbeschleunigung

wobei  $\vec{g}_\bullet$  für die Gravitationsbeschleunigung der Zentralmasse und  $\vec{g}_D$  für die der Scheibenmasse steht. Für selbstgravitierende Scheiben kann für das Gravitationspotential

$$\Phi_D = -G \int d^3\vec{r}' \frac{\rho(r')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (2.27)$$

geschrieben werden. Die Gravitationsbeschleunigung in Kugelkoordinaten wird zu

$$\vec{g}_D = -\nabla\Phi = -\left( \frac{\partial\Phi}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} \vec{e}_\varphi \right), \quad (2.28)$$

weil nach Mestel (1963), Binney & Tremaine (1987) oder Paczynski (1978) von einem abgeflachten Sphäroid ausgegangen werden muss und sich Kugelkoordinaten als besonders günstig darstellen. Aufgrund der Annahme einer rotationssymmetrischen Scheibe Gl. (2.7), bleiben nur die ersten beiden Terme in Gl. (2.28) stehen. Soll Gl. (2.27) nun gelöst werden, wird sie ebenfalls in Kugelkoordinaten und mit der Oberflächendichte Gl. (2.12) zu

$$\Phi_D = 2G \int_0^\pi d\theta \int_0^{r_0} \frac{\Sigma(r') r' dr'}{(r^2 + r'^2 - 2rr' \cos\theta)^{1/2}} \quad (2.29)$$

umgeschrieben und kann jetzt auf zwei unterschiedlichen Wegen berechnet werden:

- **Monopolnäherung:** Mestel (1963) zeigt eine approximative Lösungsmethode, indem Gl. (2.29) in Multipole entwickelt wird. Man erhält wegen Gl. (2.28) und den Symmetrieannahmen

$$\vec{g}_D^{(MP)} = \frac{d\Phi_D^{(MP)}}{dr} = -G (I_1 + I_2 + I_3),$$

mit den unterschiedlichen Momenten<sup>3</sup>  $I_1$ ,  $I_2$  und  $I_3$ . Die drei Terme lauten:

$$I_1 = \frac{1}{r^2} \int_0^r 2\pi r' \Sigma(r') dr' \quad \text{Monopolmoment}$$

$$I_2 = 2\pi \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{2k} \left[ \frac{(2k+1)}{r^{2k+2}} \int_0^r r'^{2k+1} \Sigma(r') dr' - \Sigma(r) \right] \quad \text{Dipolmoment}$$

$$I_3 = 2\pi \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{2k} \left[ \Sigma(r) - 2kr^{2k-1} \int_r^{r_0} \frac{\Sigma(r')}{r'^{2k}} dr' \right] \quad \text{Quadrupolmoment}$$

<sup>3</sup>die genaue Herleitung steht vorallem in Mestel (1963) und Binney & Tremaine (1987), hier in Kapitel 2.4 Multipole Expansion

## 2. Theoretische Grundlagen

wobei  $\alpha_{2k}$  aus den Legendre-Funktionen stammt und über

$$\alpha_{2k} = \left[ \frac{(2k)!}{(2^k k!)^2} \right]^2$$

gegeben ist. Während die Dipol- oder Quadrupolterme in der Elektrostatik durchaus über den Monopolterm dominieren können, bleibt er hier immer der Vorherrschende. Deshalb stellt nach Binney & Tremaine (1987) der Monopolterm eine sehr gute Approximation zur Lösung des Gravitationspotentials dar, weshalb alle Terme höherer Ordnung nicht mehr berücksichtigt werden müssen. Es genügt also, nur den Monopolterm  $I_1$  zu betrachten, womit der Beschleunigungsterm über

$$g_D^{(\text{MP})} = -\frac{G}{r^2} \int_0^r 2\pi \Sigma(r') r' dr'$$

berechnet werden kann.

- **volle Selbstgravitation:** Binney & Tremaine (1987) geben auch eine Methode an, wie Gl. (2.29) exakt über Bessel-Funktionen gelöst werden kann. Dazu wird diese zunächst umgeschrieben

$$\Phi_D^{(\text{VS})} = -2\pi G \int_0^\infty dk J_0(kr) \int_0^\infty dr' \Sigma(r') J_0(kr') r',$$

und wegen Gl. (2.28) erhält man für die Gravitationsbeschleunigung

$$g_D^{(\text{VS})} = -2\pi G \int_0^\infty dk k J_1(kr) \int_0^\infty dr' \Sigma(r') J_0(kr') r'.$$

Damit kann die Gravitationsbeschleunigung nun über Gl. (2.26) zusammengesetzt werden:

$$g(r) = -\frac{GM_\bullet}{r^2} + g_D^{(\text{MP}),(\text{VS})}(r), \quad (2.30)$$

wobei mit dem letzten Term gesteuert wird, ob Selbstgravitation vorliegt - und wenn ja, welcher Art diese sein soll.

## 2.3. Der Drehimpulstransport

Aufgrund der DEH in einer AS kann ein Massentransport nur dann stattfinden, wenn durch dissipative Prozesse einzelne Fluidelemente ihren Drehimpuls miteinander austauschen können. Dieser Mechanismus soll im Folgenden anhand Abbildung (2.3) plausibel gemacht werden.

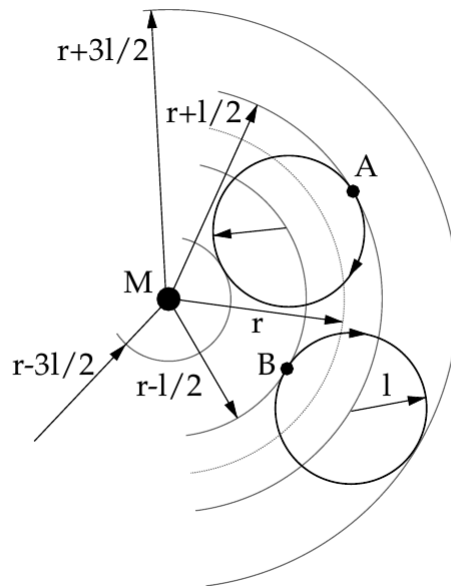


Abbildung 2.3.: Skizze (nicht maßstabsgetreu) einer AS in der Draufsicht mit den nötigen Größen Radius  $r$ , Zentralmasse  $M$  und mittlere freie Weglänge  $l$  beschriftet, zur Erklärung des Drehimpulstransports. A und B stehen für die Positionen zweier Fluidelemente A und B

Ausgehend von Gl. (2.2) in allgemeinen Koordinaten und der Annahme, dass ein inkompressibles, viskoses Fluid vorliegt erhält man die Gleichung

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \frac{1}{\rho} \nabla \vec{\sigma}, \quad (2.31)$$

wobei  $\nabla \vec{\sigma}$  für eine viskose Kraftdichte steht. Aufgrund der Annahme Gl. (2.7), also der Axialsymmetrie, trägt nur noch die

$$\sigma_{r\varphi} = -\eta r \frac{\partial \Omega}{\partial r} \quad (2.32)$$

## 2. Theoretische Grundlagen

Komponente aus dem viskosen Spannungstensor Gl. (2.3) bei. Um die dynamische Viskosität  $\eta$  zu beschreiben nahm man zunächst an, dass es sich um lokale Effekte handeln müsse und versuchte, diese über einfache molekulare Viskosität<sup>4</sup> zu beschreiben. Bereits Lüst (1952) stellte jedoch fest, dass molekulare Viskosität nicht die Ursache für die sehr hohen abgestrahlten Energien sein kann, da diese innerhalb der relativ kurzen Zeitskalen<sup>5</sup> von einigen  $10^6$  a nicht genug Energie erzeugen können. Deshalb versucht man ein Viskositätsmodell zu konstruieren, das in der Lage ist, diese Schwierigkeit zu beheben. Ein sehr geeigneter Ansatz dafür ist die sogenannte **turbulente Viskosität**, die zwar sehr gut mit der Beobachtung übereinstimmende Ergebnisse liefert, aber auf keiner grundlegenden physikalischen Theorie beruht. In Abschnitt 2.4 werden zwei mögliche Parametrisierungen dafür gezeigt.

Im Folgenden wird ein Widerspruchsbeweis zur Erklärung (Subramanian et al., 2004) vorgenommen. Dazu darf als weitere Annahme **kein** Massentransport stattfinden. Wie bereits erwähnt winden sich die Fluidelemente auf engen Spiralbahnen Richtung SL und besitzen somit Drehimpuls. Da ein Massentransport ausgeschlossen wird, muss der Drehimpuls konstant bleiben wodurch das von Pringle (1981) aus Gl. (2.31) hergeleitete Drehmoment<sup>6</sup> (als zeitliche Änderung des Drehimpulses)

$$\mathcal{G} = -2\pi r^3 \Sigma \nu \frac{d\Omega}{dr} \quad (2.33)$$

verschwindet. Betrachtet man nun Fluidelement A oder B aus einem Bezugssystem im Zentrum (siehe Abbildung (2.3)), so folgen diese einer epizyklischen Bahn und beginnen zwischen

$$r_A \in \left[ r + \frac{l}{2}, r - \frac{3l}{2} \right], \quad r_B \in \left[ r + \frac{3l}{2}, r - \frac{l}{2} \right] \quad (2.34)$$

zu oszillieren. Wegen DEH und Energieerhaltung (EEH) muss sich beispielsweise A nach innen bewegen, wenn sich B nach außen bewegt, und das so lange, bis sie vom umgebenden Material absorbiert werden. Die dadurch entstandenen Wirbel werden innerhalb ihrer mittleren freien Weglänge  $l$ , also ihrer Dämpfungslänge, absorbiert. Somit

<sup>4</sup>Moleküle sind aufgrund ihrer Struktur miteinander verzahnt.

<sup>5</sup>für quasarähnliche Objekte nach Lynden-Bell (1969).

<sup>6</sup>das die gleiche Proportionalität wie Gl. (2.32) aufweist.



### 2.3. Der Drehimpulstransport

hat man nun ein Viskositätsmodell, das über Turbulenz<sup>7</sup>, die durch die Oszillationen generiert wird, erklärt werden kann.

An den Ausgangspunkten A und B hat die radiale Geschwindigkeit Extrema. Damit fällt die radiale Geschwindigkeitskomponente in der Gleichung für die spezifische Energie  $E/m$  heraus. Es gilt also

$$\frac{E_A}{m} = \underbrace{\frac{1}{2}v_{r,A}^2}_{=0} + \frac{J^2}{2r_A} - \frac{GM}{r_A^2} = \underbrace{\frac{1}{2}v_{r,B}^2}_{=0} + \frac{J^2}{2r_B} - \frac{GM}{r_B^2} = \frac{E_B}{m}.$$

Stellt man dies nach dem spezifischen Drehimpuls  $J$  um, folgt

$$J = \left( \frac{2GM r_A r_B}{r_A^2 + r_B^2} \right)^{1/2}.$$

In dieser Gleichung werden nun die minimalen bzw. maximalen Radien Gl. (2.34) eingesetzt und ein innerer- und äußerer Drehimpuls

$$J_{i/a} = \sqrt{GM r_0} \left( 1 \pm \frac{l}{2r_0} \right)^{1/2} \left( 1 \mp \frac{3l}{2r_0} \right)^{1/2} \left( 1 - \frac{l}{2r_0} \right)^{-1/2}$$

berechnet. Nach einer Linearisierung dieser Gleichungen wird die Differenz  $J_i - J_a$  gebildet und in die Formel von Hartmann (1998)

$$\mathcal{G} = 2\pi r \Sigma w (J_i - J_a)$$

für das viskose Drehmoment eingesetzt, was mit  $\nu = wl/3$  zu

$$\mathcal{G} = -2\pi r^3 \Sigma \nu \frac{d\Omega}{dr},$$

wird und exakt Gl. (2.33) entspricht. Dabei ist  $w$  die charakteristische Geschwindigkeit im Wirbel.

Die zwingende Annahme, dass kein Massentransport stattfindet, führt also zu einem Widerspruch. Denn gerade dadurch, dass ein viskoses Drehmoment  $\mathcal{G}$  ohne einen ge-

---

<sup>7</sup>Es sei hier angemerkt, dass die Entstehung von Turbulenz noch nicht verstanden ist. Hier wird nur ein heuristischer Erklärungsversuch (Subramanian et al., 2004) gegeben!

## 2. Theoretische Grundlagen

forderten Massentransport generiert wird, hat man gezeigt, dass ein Drehimpulsstrom fließen muss. Die einzige Größe in  $\mathcal{G}$ , die keine Erhaltungseigenschaften besitzt, ist die Viskosität. Da die molekulare Viskosität zu schwach ist, um in hinreichend kurzen Zeiten die hohe Leuchtkraft eines AGK zu erklären, greift man auf ein turbulentes Viskositätsmodell zurück, das im nächsten Abschnitt 2.4 exakt eingeführt wird.

### 2.4. Die Viskositätsparametrisierung

Im Allgemeinen kann Turbulenz über einen dimensionslosen Parameter, der Reynolds-Zahl  $\Re$ , charakterisiert werden. Die Reynolds-Zahl ist definiert über

$$\Re \doteq \frac{\rho w l}{\eta} = \frac{w l}{\nu},$$

wobei die Größen  $w$  und  $l$  wieder die charakteristische Geschwindigkeit, beziehungsweise die charakteristische Länge<sup>8</sup> sind. Die kinematische Viskosität ist als

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} \tag{2.35}$$

definiert, während  $\eta$  die dynamische Viskosität beschreibt. Die in Abschnitt 2.1.1 bereits erwähnte Dehnviskosität spielt nach Frank et al. (2002) in den hier verwendeten Modellen keine Anwendung, da keine starken Stoßfronten auftreten. Im Fall von AS kann für die Reynolds-Zahl auch

$$\Re = \frac{r v_\varphi}{\nu} \tag{2.36}$$

geschrieben werden. An Gl. (2.2) wird der Geschwindigkeit und dem Druck eine kleine Störung

$$v = v_0 + \delta v$$

$$p = p_0 + \delta p$$

überlagert, womit man ein gekoppeltes System linearer Differentialgleichungen erhält. Die Randbedingungen dieses Systems erfordern, dass „die Geschwindigkeit  $\delta v$  an den

---

<sup>8</sup>für mathematisch ähnliche Körper genügt es für die Form eines umströmten Körpers nur einen einzigen Wert anzugeben, der seine Geometrie beschreibt- siehe Landau & Lifšic (1974) S.67f und S.114fff

unbeweglichen starren Flächen verschwinden muss“<sup>9</sup>. Die Lösungen des Systems müssen deshalb reine Ortsfunktionen sein, die über einen Faktor  $e^{i\omega t}$  zeitlich entwickelt werden können. Weiterhin wird dadurch eine Frequenz  $\omega$  eingeführt, die eine Aussage über die Stabilität der Strömung durch die Störung trifft. Eine Instabilität würde unendlich anwachsen. Deshalb müssen die Amplituden der Frequenzen  $\omega$  im Laufe der Zeit abklingen. Dabei wird der Übergang zwischen stabil und instabil über die kritische Reynolds-Zahl  $\Re_{\text{krit}}$  markiert und führt zu folgender Aussage:

- $\Re < \Re_{\text{krit}} \rightarrow$  laminare Strömung
- $\Re > \Re_{\text{krit}} \rightarrow$  turbulente Strömung.

Mit diesen Vorbemerkungen können nun zwei unterschiedliche Viskositätsmodelle, die  $\alpha$ - bzw.  $\beta$ -Viskosität beschrieben werden.

### 2.4.1. Das Modell der „ $\alpha$ -Viskosität“

Ein Konzept für eine turbulente Viskosität, den sogenannten „ $\alpha$ -Ansatz“, wurde als Alternative zur molekularen Viskosität von Shakura & Sunyaev (1973) entwickelt. Die kinematische Viskosität  $\nu$ , die in Gl. (2.35) verwendet wurde, muss uminterpretiert werden. Dazu wird eine charakteristische Länge  $l$  und eine charakteristische (turbulente) Geschwindigkeit  $w$  eingeführt. Die turbulenten Wirbel können dabei nicht größer als die kleinste Ausdehnung der Scheibe, also der Höhe  $H$  sein. Sollte die turbulente Geschwindigkeit größer als die Schallgeschwindigkeit ( $w > c_s$ ) werden und sich dadurch Stoßwellen in der AS ausbilden, so werden diese durch die Viskosität sofort stark gedämpft und fallen wieder in den Unterschallbereich zurück. Beide Forderungen werden mit den Bedingungen

$$l = \alpha_1 H, \quad w = \alpha_w c_s, \quad \alpha_1, \alpha_w \leq 1$$

realisiert und führen zu dem Ausdruck

$$\nu_t = \alpha_w \alpha_1 H c_s.$$

---

<sup>9</sup>siehe Landau & Lifšic (1974) auf S.115

## 2. Theoretische Grundlagen

Durch einen allgemeinen Parameter  $\alpha \doteq \alpha_w \alpha_1 \leq 1$  gelangt man nun zu der in der Praxis sehr häufig verwendeten  **$\alpha$ -Viskosität**

$$\nu_t^{(\alpha)} = \alpha H c_s, \quad (2.37)$$

mit der die viskose Zeitskala (Kato et al., 2008)

$$\tau_\alpha = \frac{r^2}{\nu_t^{(\alpha)}} \quad (2.38)$$

festgelegt wird. Diese gibt die Zeit an, mit der sich ein SL über die  $\alpha$ -Viskosität entwickelt.

### 2.4.2. Das Modell der „ $\beta$ -Viskosität“

Ein allgemeingültigeres Modell haben Duschl et al. (2000) in Form der „ $\beta$ -Viskosität“ aufgestellt. Hierbei wurde Gl. (2.36) zu

$$\nu_t = \frac{r v_\varphi}{\Re}$$

umgestellt und somit die wichtige Reynolds-Zahl mit einbezogen. Weiterhin muss  $\Re = \Re_{\text{krit}}$  gefordert werden, um zu gewährleisten, dass keine laminare, sondern ausschließlich turbulente Strömungen vorherrschen. Definiert man nun  $\beta \leq 1/\Re_{\text{krit}}$  mit den für diesen Fall typischen kritischen Reynolds-Zahlen  $\Re_{\text{krit}} \approx 10^2 \dots 10^3$ , erhält man die  **$\beta$ -Viskosität**

$$\nu_t^{(\beta)} = \beta r v_\varphi, \quad (2.39)$$

mit der entsprechenden viskosen Zeitskala

$$\tau_\beta = \frac{r^2}{\nu_t^{(\beta)}} = \frac{r}{\beta v_\varphi}. \quad (2.40)$$

In selbstgravitierenden AS hat die Scheibenmasse sehr großen Einfluss auf das Gravitationspotential und ändert dadurch das Akkretionsverhalten eines AGK. Will man die Viskosität in einer solchen AS beschreiben, kann die  $\alpha$ -Viskosität nicht herangezogen werden, da diese nur eine lokale Aussage trifft. Die  $\beta$ -Viskosität hingegen hängt vom

Ort und von der Azimutalgeschwindigkeit ab, womit sie das lokale als auch das globale Verhalten beschreibt. Nach Duschl et al. (2000) können für selbstgravitierende Scheiben (mit einem Außenradius  $r_a \approx 300\text{pc}$ ) die viskosen Zeitskalen zu

$$\begin{aligned}\tau_\alpha &\approx 3 \cdot 10^{11} \text{ a} \\ \tau_\beta &\approx (3 \cdot 10^9 - 3 \cdot 10^{10}) \text{ a}\end{aligned}$$

berechnet werden. Während das Material über die  $\alpha$ -Parametrisierung länger als die Hubble-Zeit ( $\tau_{\text{Hubble}} \approx 13,6 \cdot 10^9 \text{ a}$ ) benötigt um zum Zentrum zu gelangen, liegt sie durch die  $\beta$ -Parametrisierung innerhalb dieses zeitlichen Rahmens. Es kann weiterhin gezeigt werden, dass sie im Spezialfall in die  $\alpha$ -Viskosität übergeht, was ihre allgemeinere Gültigkeit demonstriert.

## 2.5. Die Scheibenhöhe $H$

Das **hydrostatische Gleichgewicht** in  $z$ -Richtung wird für eine AS über Gl. (A.4) ausgedrückt. Mit der Annahme „statisch“ verschwinden natürlich alle Geschwindigkeitskomponenten aus der Gleichung, so dass nur noch die Terme

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} \quad (2.41)$$

übrig bleiben. Dies beschreibt den Gleichgewichtszustand zwischen Gravitationskraft und Druckgradient. Beachtet man die bereits erwähnten Symmetrien kann man für das Gravitationspotential Gl. (2.28) über eine Basistransformation von Kugel- in Zylinderkoordinaten die vertikale Gravitationsbeschleunigung

$$|\vec{g}_z| = \frac{2GM}{r^2} \frac{z}{r},$$

berechnen. Eingesetzt in Gl. (2.41) und unter Beachtung, dass  $z = H/2$  ist (siehe Abbildung (2.1)), erhält man

$$\frac{GMH}{r^3} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z}.$$

## 2. Theoretische Grundlagen

Das Gleichheitszeichen gilt jedoch nur eingeschränkt, denn durch  $z = H/2$  wird auf die Scheibenmitte projiziert. Die rechte Seite der Gleichung gilt jedoch für eine Höhenstruktur. Deshalb muss ein Ausdruck für den Druckgradienten gefunden werden, um ebenfalls eine Aussage über den Druck in der Scheibenmitte treffen zu können. Dafür verwendet man die sogenannte „**Ein-Zonen-Approximation**“. Das heißt, dass das Differential

$$\frac{\partial P}{\partial z} \approx \frac{P(H) - P(0)}{H - 0} = -\frac{P(0)}{H},$$

als Differenzenquotient geschrieben wird. Weil der Druck an der Oberfläche der Scheibe viel kleiner als im Innern der Scheibe, also  $P(H) \ll P(0) = P_0$  ist, kann obige Näherung gerechtfertigt werden. Das hydrostatische Gleichgewicht hat damit nun die Form

$$\frac{GMH}{r^3} = \frac{P_0}{\rho H}.$$

Noch eleganter kann diese Beziehung über Gl. (2.24) zu

$$\Omega_K^2 H^2 = \frac{P_0}{\rho},$$

umgeformt werden. Mit der isothermen Schallgeschwindigkeit, Gl. (2.5) folgt letztendlich eine Bedingung für die Scheibenhöhe

$$H = \frac{c_s}{\Omega_K}.$$

Da die Schallgeschwindigkeit konstant ist und die Kepler-Geschwindigkeit für große Radien sehr klein wird, nimmt die Scheibenhöhe  $H$  nach außen immer mehr zu. Anders ausgedrückt weitet sich die Scheibe mit zunehmendem Abstand vom Zentrum auf und kann somit Abbildung (2.1) erklären.

Weiterhin könnte eine Aussage über Temperatur und Druck in  $z$ -Richtung getroffen werden. Da dies in dieser Arbeit aber nicht gebraucht wird, soll es mit einer Erwähnung und einem Verweis auf Kato et al. (2008) belassen werden.

## 2.6. Die Eddington-Akkretionsrate

Um die **Eddington-Akkretionsrate** abzuleiten, soll zunächst auf die **Eddington-Leuchtkraft** (Eddington, 1921) eingegangen werden. Diese ist ein Maß für die maximale Helligkeit, die ein massebehaftetes Objekt erreichen kann, da Strahlungsdruckkraft und Gravitationskraft miteinander konkurrieren. Die Leuchtkraft ist ganz allgemein über

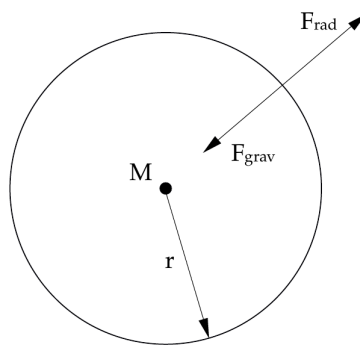


Abbildung 2.4.: Kräftegleichgewicht zwischen Strahlungsdruck- und Gravitationskraft zur Erklärung der (Eddington)-Leuchtkraft

$$L = 4\pi r^2 f \quad (2.42)$$

gegeben, wobei  $f$  den Strahlungsfluss pro Flächeneinheit über das gesamte Frequenzspektrum integriert darstellt (Kato et al., 2008). Die Strahlungsdruckkraft erhält man nun durch Umstellen von Gl. (2.42) nach  $f$  und durch Multiplikation mit dem Thomson-Wirkungsquerschnitt

$$\sigma_T = \frac{8\pi e^4}{3m_e^2 c^4} \approx 6,65 \cdot 10^{-25} \text{ cm}^2.$$

Dieser wird verwendet, da eine AS vor allem aus Staub und Wasserstoff besteht und deshalb Streuung zwischen Photonen und „quasifreien“ Teilchen angenommen werden kann. Schreibt man  $\sigma_T$  als Kraft um und setzt ihn mit der Gravitationskraft gleich, so

## 2. Theoretische Grundlagen

erhält man

$$F_{\text{rad}} = \frac{\sigma_{\text{T}} f}{c} = \frac{\sigma_{\text{T}} L}{4\pi r^2 c} = \frac{GMm_{\text{H}}}{r^2} = F_{\text{grav}}$$

$$\Rightarrow L_{\text{Edd}} = \frac{4\pi GMm_{\text{H}}c}{\sigma_{\text{T}}}, \quad (2.43)$$

also letztendlich die Eddington-Leuchtkraft. Diese begrenzt die maximale Strahlung, die abgegeben werden kann, was zu der wichtigen Bedingung

$$L \leq L_{\text{Edd}},$$

der sogenannten **Eddington-Grenze**, führt. Dreht man dieses Argument zugunsten eines AGK um, findet man speziell für ein Schwarzes Loch mit Masse  $M_{\bullet}$

$$L = \frac{4\pi GM_{\bullet} m_{\text{p}} c}{\sigma_{\text{T}}} \leq \frac{4\pi GM_{\text{Edd}} m_{\text{p}} c}{\sigma_{\text{T}}} = L_{\text{Edd}} \quad (2.44)$$

$$\Rightarrow M_{\bullet} \leq M_{\text{Edd}}$$

eine untere Massenschranke, die nach Schneider (2006) zu  $M_{\bullet} \approx 8 \cdot 10^7 \left( \frac{L}{10^{46} \text{erg/s}} \right) M_{\odot}$  berechnet wird.

Die Strahlungsdruckkraft sowie die Gravitationskraft sind konservative Kräfte, weshalb man die Potentiale berechnen kann. Damit lässt sich nun die Akkretionsleuchtkraft

$$L_{\text{acc}} = \frac{GM_{\bullet} \dot{m}}{r}$$

herleiten (Kato et al., 2008), wobei für  $r$  der Schwarzschildradius<sup>10</sup> eingesetzt und das Ergebnis unabhängig von der Masse wird. Weiterhin definiert man den sogenannten **Akkretionseffizienzfaktor** ( $\zeta \approx 0,1$ ), welcher das Verhältnis zwischen der Ruheenergie des Scheibenmaterials und der abgestrahlten Energie angibt und dadurch die maximale Akkretionsrate beschränkt. Die Akkretionsleuchtkraft für einen beliebigen Massefluss,

<sup>10</sup>Grenzradius eines SL, hinter dem jede Information verloren geht. Es gilt  $R_{\text{s}} = \frac{2GM_{\bullet}}{c^2}$ .



beziehungsweise einer beliebigen Akkretionsrate  $\dot{m}$ , wird damit zu

$$L_{\text{acc}} = \zeta \dot{m} c^2. \quad (2.45)$$

Setzt man Gl. (2.43) und Gl. (2.45) gleich, erhält man die **Eddington-Akkretionsrate**

$$\dot{m} \rightarrow \dot{M}_{\text{Edd}} = \frac{4\pi G M_{\bullet} m_{\text{H}}}{\zeta \sigma_{\text{T}} c}. \quad (2.46)$$

Diese besagt, wie schnell ein SL maximal anwachsen kann, wenn es nahe der Eddington-Grenze akkretiert. Trifft dieser Fall zu, kann die dafür benötigte Zeit über die **Salpeter-Zeitskala**

$$\tau_{\text{S}} = \frac{c \sigma_{\text{T}}}{4\pi G m_{\text{H}}} \approx 4,5 \cdot 10^8 \text{ a} \quad (2.47)$$

berechnet werden. Interessanterweise ist diese ebenfalls unabhängig von der Masse des akkretierenden Objekts (Kato et al., 2008).

## 2.7. Das Programm *hedis*

Das Programm *hedis*<sup>11</sup> (Blank, 2010) liegt in den Sprachen C und Fortran 90 vor und berechnet die eindimensionale Dynamik<sup>12</sup> in AS um SMSL. Es löst das erweiterte und das Pringle-Modell, die beide über das nichtlineare partielle Differentialgleichungssystem Gl. (2.16) beschrieben werden können<sup>13</sup>. Solche Systeme hängen von Rand- und Anfangsbedingungen ab, wobei letztere als konstante Anfangsdaten vorgegeben werden müssen. *hedis* beruht weiterhin auf einem Finite-Volumen-Verfahren (FVV), welches speziell für nichtlineare Erhaltungsgleichungen, wie beispielsweise die Navier-Stokes-Gleichung, verwendet wird. Ein FVV teilt sich ein Rechengebiet

$$\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^1 \times [r_{\text{min}}, r_{\text{max}}]$$

<sup>11</sup>Das Kunstwort *hedis* leitet sich aus **Henyey-Disk-Solver** ab

<sup>12</sup>Um die Massen Gl. (2.22) und Massenflüsse Gl. (2.23) berechnen zu können, muss zwangsläufig über den Winkel  $\varphi$  integriert werden

<sup>13</sup>Das Pringle-Modell verwendet nur eine partielle Differentialgleichung, im Gegensatz zu den drei Gl. des erweiterten Modells. Trotzdem können unter Vernachlässigung nicht benötigter Terme die gleichen Routinen und somit das selbe Gleichungssystem verwendet werden.

## 2. Theoretische Grundlagen

in einzelne Segmente<sup>14</sup> auf, die über eine Verteilungsfunktion

$$r_{i+1/2} = r_{\min} \cdot 10^{\frac{i}{pN} \log_{10} \left( \frac{r_{\max}}{r_{\min}} \right)}, \quad (2.48)$$

mit dem Laufindex  $i = 0, \dots, N + 1$  in logarithmischen Abständen gesetzt werden. Um

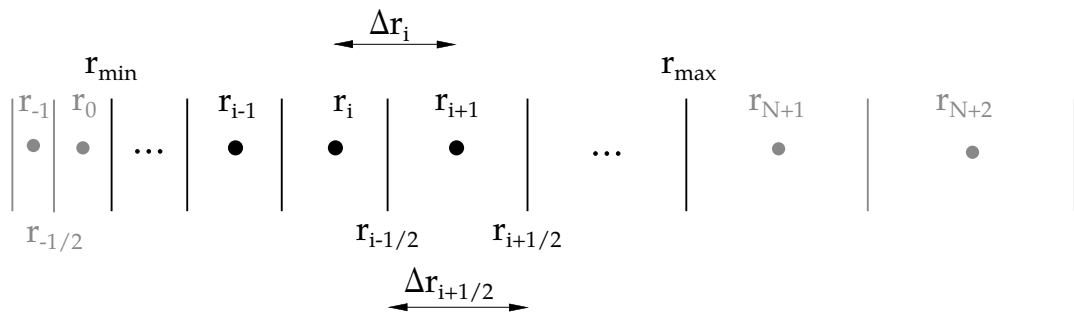


Abbildung 2.5.: Skizze des logarithmischen Rechengitters mit zwei Geisterzellen am Innen- und Außenrand (grau dargestellt)

ein numerisches Verfahren aufstellen zu können, muss Gl. (2.16) in integraler Form angegeben werden, indem über die Zellvolumina  $\mathcal{L}_i \in [r_{i-1/2}, r_{i+1/2}]$  und über die Zeit

<sup>14</sup>Die Anzahl der Segmente kann gesteuert werden und ist die Kennzahl für die Auflösung des betrachteten Systems

$t \in [t_n, t_{n+1}]$  integriert wird

$$\int_t \int_{\mathcal{L}_i} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} r dr dt + \int_t \int_{\mathcal{L}_i} \frac{\partial \vec{F}(\vec{u})}{\partial r} r dr dt = \int_t \int_{\mathcal{L}_i} \frac{\partial \vec{V}(r, \vec{u}, \vec{u}')}{\partial r} r dr dt + \int_t \int_{\mathcal{L}_i} \left( \vec{W}(r, \vec{u}, \vec{u}') + \vec{S}(r, \vec{u}) \right) r dr dt.$$

Die Zeit  $t$  gibt an, wie lange Information aus einer Zelle in eine andere benötigt. Um dieses Integral auszuwerten müssen die Mittelwerte einer Erhaltungsgröße innerhalb einer Zelle über

$$\langle u(t) \rangle = \frac{1}{|\mathcal{L}_i|} \int_{\mathcal{L}_i} u(r, t) d\mathcal{L} = \frac{1}{\Delta V} \int_{r_{i-1/2}}^{r_{i+1/2}} u(r, t) r dr \quad (2.49)$$

berechnet werden. Beim Volumenelement  $\Delta V$  muss beachtet werden, dass es eigentlich ein „eindimensionales Volumen“ ist. Wertet man das Integral nun aus, erhält man

$$\langle \vec{u}_{t_{n+1}} \rangle = \langle \vec{u}_{t_n} \rangle - \frac{\Delta t}{\Delta V} \left( \vec{F} \Big|_{\mathcal{L}_{i,t}} + \vec{V} \Big|_{\mathcal{L}_{i,t}} \right) + \Delta t \left( \left\langle \vec{W} \Big|_{\mathcal{L}_{i,t}} \right\rangle + \left\langle \vec{S} \Big|_{\mathcal{L}_{i,t}} \right\rangle \right). \quad (2.50)$$

Diese Gleichung kann so interpretiert werden, dass die zeitliche Änderung von  $\vec{u}$  dem Zu- oder Abfließen eines Flusses von einer Zelle des Rechengebietes  $\mathcal{L}$  über den Rand in eine andere entspricht. Ausserdem wird ersichtlich, wie die numerische Zeitintegration funktioniert. Das neue  $\langle \vec{u}_{t_{n+1}} \rangle$  wird aus dem alten  $\langle \vec{u}_{t_n} \rangle$  und der räumlichen Änderung der Flüsse und Quellterme berechnet, was in *hedis* wahlweise über ein explizites Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung (Faires & Burden, 2000) oder über ein implizites Henyey-Verfahren (Kippenhahn & Weigert, 1990) realisiert werden kann.

Eine ausführliche Herleitung von Gl. (2.50) kann bei Illenseer (2006) gefunden werden. Diese geht grundlegend auf ein zentrales Schema nach Godunov (1959) zurück und wurde über Kurganov & Tadmor (2000) zu einem zentralen upwind-Schema weiterent-

## 2. Theoretische Grundlagen

wickelt. Das bedeutet, dass auf eine lineare Rekonstruktion<sup>15</sup>

$$\begin{aligned}\vec{u}_{i+1/2}^{(+)} &= \vec{u}_{i+1} + \vec{u}'_{i+1} \cdot (r_{i+1/2} - r_{i+1}) \\ \vec{u}_{i+1/2}^{(-)} &= \vec{u}_i + \vec{u}'_i \cdot (r_{i+1/2} - r_i)\end{aligned}\tag{2.51}$$

zurückgegriffen wird, um die konservativen Variablen  $\vec{u}$  für die numerischen Flüsse  $\vec{F}$  an den Zellwänden zu berechnen. Die Ableitungen werden mit

$$\vec{u}'_i = \text{minmod} \left( \frac{\vec{u}_{i+1} - \vec{u}_i}{\Delta r_{i+1/2}}, \frac{\vec{u}_i - \vec{u}_{i-1}}{\Delta r_{i-1/2}} \right)\tag{2.52}$$

angegeben, wobei die sogenannte **Limiter-Funktion** über

$$\text{minmod}(a,b) = \begin{cases} a, & \text{wenn } ab > 0 \text{ und } |a| \leq |b|, \\ b, & \text{wenn } ab > 0 \text{ und } |a| > |b|, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

definiert ist. Der minmod-Limiter verwendet also die betragsmäßig kleinere Steigung, um unerwünschte Oszillationen in den Lösungen zu vermeiden. In Abschnitt 3.5.4 werden zwei weitere Limiter vorgestellt, die jeweils etwas andere Eigenschaften, wie beispielsweise schlechtere Dämpfungseigenschaften haben, für spezielle Anwendungen jedoch vorteilhafter sein können. Weiterhin wurde bei Illenseer (2006) für die Größe

$$\vec{F} \Big|_{\mathcal{L}_i, t} = \frac{\vec{\mathcal{F}}_{i+1/2} - \vec{\mathcal{F}}_{i-1/2}}{\Delta V}$$

aus Gl. (2.50) der Ausdruck für die numerischen Flüsse

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{F}}_{i+1/2} &= \frac{1}{a_{i+1/2}^+ - a_{i-1/2}^-} \left[ a_{i+1/2}^+ \vec{F}(\vec{u}_{i+1/2}^{(-)}) - a_{i+1/2}^- \vec{F}(\vec{u}_{i+1/2}^{(+)}) \right. \\ &\quad \left. - a_{i+1/2}^+ a_{i-1/2}^- \left( \vec{u}_{i+1/2}^{(-)} - \vec{u}_{i+1/2}^{(+)} \right) \right]\end{aligned}\tag{2.53}$$

<sup>15</sup>links- ( $r < r_{i+1/2}$ ) beziehungsweise rechtsseitige ( $r > r_{i+1/2}$ ) Extrapolationen

hergeleitet. Der Term in Klammer müsste eigentlich mit einer Fläche  $\Delta A$  multipliziert werden. Die Variablen Gl. (2.17) beinhalten diese jedoch bereits (siehe auch Abschnitt 3.5.1). Über die „Homogenitätsbedingung der Flüsse“  $\vec{F}(a\vec{u}) = a\vec{F}(\vec{u})$  kann aus dem Gradienten des Flussvektors (Gl. (2.16)) die Jacobi-Matrix mit ihren Eigenwerten

$$\lambda_1 = v_r - c_s < \lambda_2 = v_r < \lambda_3 = v_r + c_s.$$

berechnet werden. Diese definieren die **Signalausbreitungsgeschwindigkeiten**

$$a_{i+1/2}^{\pm} = \max/\min_{\vec{u} \in \{\vec{u}_{i+1/2}^{(+)}, \vec{u}_{i+1/2}^{(-)}\}} (\lambda_{1,2,3}(\vec{u}), 0),$$

welche deren Größe und Richtung angeben<sup>16</sup>. Über den hinteren Term in Gl. (2.53) wird die **numerische Viskosität** in die Berechnung mit einbezogen. Diese dämpft auftretende Oszillationen und kann in *hedis* über einen Schalter zu- oder abgeschaltet werden. Da die physikalischen Flüsse in den Zellmittelpunkten aus den Werten an den Zellrändern berechnet werden, hat man ein Problem am Innen- sowie am Außenrand, da diese das Ende des Rechengebietes markieren. Eine Lösung liegt darin, das Rechengebiet mit sogenannten Geisterzellen (in Abbildung (2.5) grau dargestellt) zu erweitern. Diese Zellen können nun durch das Aufstellen von Randbedingungen gesetzt werden, indem sie entweder aus dem Rechengebiet extrapoliert, kopiert oder, falls eine analytische Lösung existiert, exakt vorgegeben werden. Im Allgemeinen gibt es aber sehr viele unterschiedliche Möglichkeiten, wie man Randbedingungen in einem numerischen Code berechnen kann. Die viskosen Flüsse  $\vec{V}(r, \vec{u}, \vec{u}')$  werden zwar auch aus den Flüssen über die Zellränder berechnet, jedoch genügt es diese über eine Mittelwertbildung nach Gl. (2.49) zu berechnen. Der viskose Quellterm  $\vec{W}(r, \vec{u}, \vec{u}')$  und der Quellterm  $\vec{S}(r, \vec{u})$  können ebenfalls nach Gl. (2.49) berechnet werden, nur dass man direkt die Zellmittelwerte benutzen kann. Es ist wichtig entweder die Mittelpunktsregel, oder die Trapezregel für die Mittelwertbildung zu verwenden, damit man im Verfahren konsistent bleibt.

---

<sup>16</sup>Die Lösung eines numerischen Zeitschrittes wird über sogenannte Charakteristiken bestimmt. Die Signalausbreitungsgeschwindigkeiten entsprechen deren maximalen/ minimalen Steigungen (Illenseer, 2006)

## *2. Theoretische Grundlagen*

# 3. Numerische Tests und ihre Lösungen

In diesem Kapitel sollen einige numerische Testverfahren gelöst und besprochen werden. Dies ist notwendig und sinnvoll, um `hedis` zu überprüfen und die Qualität zu verbessern. Da die Testverfahren zum Teil eine große Herausforderung für `hedis` darstellen, werden einige Umbaumaßnahmen vorgeschlagen um die vollständige Funktionsweise zu gewährleisten.

## 3.1. Das hydrostatische Problem

Das wohl einfachste Testproblem für einen numerischen Code stellt das hydrostatische Gleichgewicht dar. Wie in Abschnitt 2.5 werden alle Geschwindigkeiten sowie die Gravitationsbeschleunigung in Gl. (2.13) bis Gl. (2.15) Null gesetzt, wodurch nur noch

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} = 0$$

und

$$\frac{c_s^2}{r} \frac{\partial (r\Sigma)}{\partial r} - \frac{\Sigma c_s^2}{r} = 0$$

übrig bleiben. Weiterhin wird die Oberflächendichte  $\Sigma(r,t) = 1$  konstant gehalten, wodurch obige Gleichungen ebenfalls verschwinden. Einfach ausgedrückt, man will also stationäre und vor allem stabile Lösungen generieren. Da die Lösungen dieses Tests demnach trivial sind, werden die Ergebnisse aus `hedis` erst im nächsten Kapitel diskutiert.

## 3.2. Der isotherme Vortex

Der isotherme Vortex<sup>1</sup> wird verwendet, um speziell die Azimutalgeschwindigkeit betrachten zu können. Dafür wird ein Wirbel im Rechengebiet erzeugt, der sich im Laufe der Zeit kaum ändern, also stabil bleiben sollte. Um dies zu gewährleisten muss gefordert werden, dass es keine radiale Geschwindigkeitskomponente  $v_r = 0$ , keine Gravitationsbeschleunigung  $g = 0$  und keine Viskosität  $\eta = 0$  geben darf, die den Wirbel zerfließen lassen würden. Damit reduzieren sich Gl. (2.13) bis Gl. (2.15) auf folgende Terme in der Impulsgleichung

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial (r \Sigma c_s^2)}{\partial r} - \Sigma \left( \frac{v_\varphi^2 + c_s^2}{r} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{r}{\Sigma} \frac{\partial \Sigma}{\partial r} &= \frac{v_\varphi^2}{c_s^2}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

was einen Gleichgewichtszustand zwischen einem „Druckgradienten“ und der spezifischen Fliehkraft darstellt. In dimensionslose Koordinaten

$$\frac{r}{r_0} \longrightarrow r_d, \quad \frac{v_\varphi^2(r,t)}{c_s^2} \longrightarrow v_d(r_d,t), \quad \frac{\Sigma(r,t)}{\Sigma_0} \longrightarrow \Sigma_d(r_d,t)$$

umgeschrieben, bleibt

$$\frac{r_d}{\Sigma_d(r_d,t)} \frac{\partial \Sigma_d(r_d,t)}{\partial r_d} = \frac{\partial \ln(\Sigma_d(r_d,t))}{\partial \ln(r_d)} = v_d^2(r_d,t)$$

übrig. Da sich die Lösung zeitlich nicht ändert, wird im Folgenden die explizite Zeitabhängigkeit weggelassen. Diese Differentialgleichung kann durch Trennung der Variablen gelöst werden. Man erhält mit

$$v_d(r_d) = r_d \Omega(r_d) \quad (3.2)$$

zunächst

$$\Sigma_d(r_d) = \Sigma_{d,\infty} \exp \left( - \int_{r_d}^{\infty} \frac{v_d^2(r_d)}{r_d} dr_d \right) = \Sigma_{d,\infty} \exp \left( - \int_{r_d}^{\infty} r_d \Omega^2(r_d) dr_d \right).$$

---

<sup>1</sup>lat. „Wirbel,,



### 3.2. Der isotherme Vortex

Die Lösungsfunktion für die Winkelgeschwindigkeit soll hinreichend schnell mit dem Radius abfallen. Dies kann über eine Exponentialfunktion der Form

$$\Omega(r_d) = e^{-r_d} \quad (3.3)$$

erreicht werden. Damit erhält man für die Oberflächendichte

$$\Sigma_d(r_d) = \Sigma_{d,\infty} \exp\left(-\frac{e^{-2r_d}}{4} \cdot (1 + 2r_d)\right), \quad (3.4)$$

wobei die Grenzwerte einfach über

$$\lim_{r_d \rightarrow \infty} \Sigma_d(r_d) = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{r_d \rightarrow 0} \Sigma_d(r_d) = e^{-\frac{1}{4}} \approx 0,778801$$

berechnet werden können. Eine weitere wichtige Größe ist die Anzahl der Umläufe  $n$ . Man bestimmt den Wert für die Winkelgeschwindigkeit an einer charakteristischen Stelle, zum Beispiel bei  $r_d = 1$ , der aus Abbildung (3.1) abgelesen werden kann. Damit berechnet man

$$\begin{aligned} \Omega(r_d) &= \frac{2\pi}{\tau_\Omega} \\ \Rightarrow \tau_{\Omega(r_d=1)} &= \frac{2\pi}{\Omega(r_d=1)} \approx \frac{2\pi}{0,3671} \approx 17,11, \end{aligned} \quad (3.5)$$

also die Zeit, die für einen Umlauf benötigt wird. Damit müssen nicht mehr die Zeiten, sondern es können die Anzahl der Umläufe verglichen werden, innerhalb derer die Lösungen stationär bleiben sollten.

### 3. Numerische Tests und ihre Lösungen

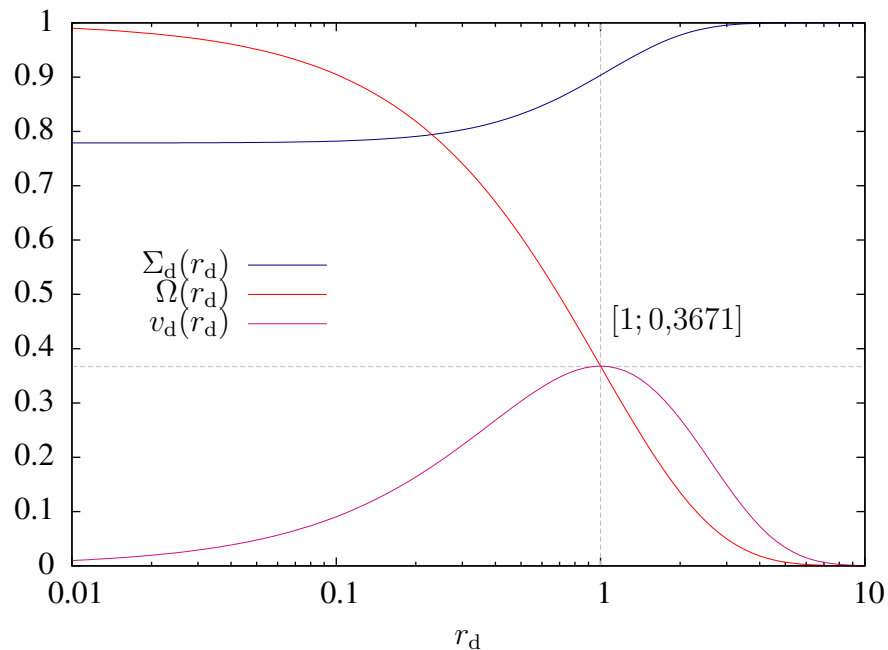


Abbildung 3.1.: Analytische Lösungen für die Oberflächendichte und die Geschwindigkeit des isothermen Vortex

### 3.3. Das isotherme Noh-Problem

Als nächstes soll besonderes Augenmerk auf die radiale Geschwindigkeitskomponente gelegt werden. Dafür betrachtet man das Noh-Problem (Noh, 1987), das starke Stoßfronten in einem Fluid beschreibt. Im einfachsten eindimensionalen Fall stellt man sich ein einseitig verschlossenes Rohr vor. Auf der offenen Seite befindet sich ein beweglicher Kolben. Wird der Kolben in das Rohr gedrückt, wird das Fluid beschleunigt und an der gegenüberliegenden Seite reflektiert. Dabei entsteht nun eine Stoßfront (siehe Abbildung (3.3)). Das Noh-Problem wird ebenfalls zum Test von hydrodynamischen

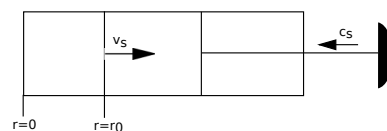


Abbildung 3.2.: Skizze zur Erklärung des eindimensionalen Noh-Problems

Codes angewendet, da die Lösungen des Problems analytisch angegeben und somit mit

### 3.3. Das isotherme Noh-Problem

den Simulationen verglichen werden können.

Wie bereits erwähnt berechnet `hedis` das partielle Differentialgleichungssystem Gl. (2.16) im isothermen und eindimensionalen Fall. Dieser Anwendungsbereich ist jedoch sehr speziell, vor allem weil die Energiegleichung nicht berücksichtigt wird und deshalb auch keine bereits existierende analytische Lösung gefunden werden konnte. Im Folgenden soll diese nun für das eindimensionale, isotherme Noh-Problem abgeleitet werden.

Aus den bekannten Noh-Lösungen (Noh, 1987) weiß man, dass eine Unstetigkeit oder Stoßfront entsteht<sup>2</sup>. Diese Sprungstelle kann über die sogenannten Rankine-Hugoniot-Bedingungen (RHB) berechnet werden und ist somit bekannt. Nicht bekannt ist der Verlauf direkt hinter der Stoßwelle. Aufgrund der Ähnlichkeit zum Sedov-Problem (Zel'Dovich et al., 1967; Landau & Lifšic, 1974), das Explosionen wie zum Beispiel Supernovae beschreibt, kann man eine Aufweichung der Kante am Fußpunkt (siehe Abbildung (3.3)) erwarten. Als Anfangsbedingung wird die Oberflächendichte als  $\Sigma(r,t) =$

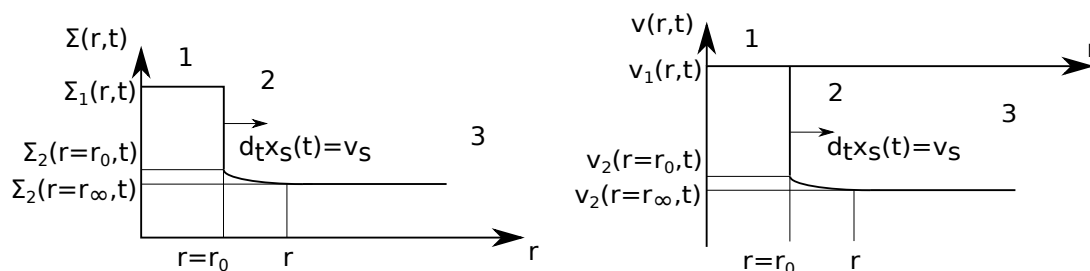


Abbildung 3.3.: Verhalten der Oberflächendichte und der Radialgeschwindigkeit eines Fluids, in dem eine Schockwelle erzeugt wurde. Es werden dabei drei Gebiete unterschieden: 1. das Gebiet hinter der Stoßfront mit hoher Dichte, 2. das Gebiet direkt vor der Stoßfront, wobei der Fußpunkt in diesem Fall leicht aufweicht und 3. das Gebiet im Unendlichen

$1 = \text{const}$  angenommen, die Radialgeschwindigkeit  $v_r = -1 = \text{const}$  und die Schallgeschwindigkeit  $c_s = 1 = \text{const}$  gesetzt. Zur Beschreibung der Unstetigkeit werden damit zunächst die RHB auf den in dieser Arbeit betrachteten Fall umgeschrieben, wo-

<sup>2</sup>siehe hierzu auch <http://www.astrophysik.uni-kiel.de/> (28.05.2013)

### 3. Numerische Tests und ihre Lösungen

mit man die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned}v_s (\Sigma_2 - \Sigma_1) &= \Sigma_2 v_2 - \Sigma_1 v_1 \\v_s (\Sigma_2 v_2 - \Sigma_1 v_1) &= \Sigma_2 (v_2^2 + c_s^2) - \Sigma_1 (v_1^2 + c_s^2)\end{aligned}$$

mit der Stoßwellengeschwindigkeit  $v_s$  erhält. Dabei sind die Funktionen

$$\Sigma_k = \Sigma_k(r, t) \quad \text{und} \quad v_{r,k} = v_{r,k}(r, t) \quad \text{mit } k \in 1, 2$$

Funktionen von Ort und Zeit. Mit der Isothermie-Bedingung Gl. (2.5) und der Geschwindigkeit hinter der Stoßfront  $v_1 = 0$  werden die zwei obigen Gleichungen zu

$$\frac{v_s}{c_s} \left(1 - \frac{\Sigma_1}{\Sigma_2}\right) = \text{Ma}, \quad (3.6)$$

$$\frac{v_s v_2}{c_s^2} = \left(1 - \frac{\Sigma_1}{\Sigma_2}\right) + \text{Ma}^2 \quad (3.7)$$

wobei

$$\text{Ma} \doteq \frac{v_2}{c_s} \quad (3.8)$$

als die Mach-Zahl am Ort  $r = r_0$  definiert wurde. Mit Gl. (3.6) und Gl. (3.7) hat man zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten gefunden und kann aus ihnen jetzt die RHB beziehungsweise die Sprungbedingung für das Oberflächendichteverhältnis

$$\frac{\Sigma_2}{\Sigma_1} = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4}{\text{Ma}^2}}\right), \quad (3.9)$$

beziehungsweise für das Geschwindigkeitsverhältnis

$$\frac{v_s}{v_2} = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{4}{\text{Ma}^2}}\right). \quad (3.10)$$

berechnen. Man erkennt also, dass die Sprungbedingungen maßgeblich durch die Mach-Zahl bestimmt werden.

Der weitere Verlauf der Lösung wird als nächstes mit dem Anfangssystem über Gl. (2.13) bis Gl. (2.15) beschrieben. Dabei werden die Terme  $\bar{\zeta}$ ,  $\bar{\eta}$  vernachlässigt, weil man die

### 3.3. Das isotherme Noh-Problem

Stoßfront beschreiben will, die durch die Viskosität aber zerfließen würde (Abschnitt 2.4). Weiterhin berücksichtigt man die Gravitationsbeschleunigung  $g = 0$  und die Zentripetalbeschleunigung über  $v_\varphi = 0$  nicht mehr, da man keine äußeren Kräfte haben will, welche die Stoßfront zerstören würden. Damit fällt die Drehimpulsgleichung Gl. (2.16) aus dem System heraus, womit sich dieses auf die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \Sigma v_r) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} (v_r) + v_r \frac{\partial}{\partial r} (v_r) - \frac{c_s^2}{\Sigma} \frac{\partial}{\partial r} (\Sigma) &= 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

reduziert. Diese beschreiben jetzt ein System aus zwei partiellen nichtlinearen inhomogenen Differentialgleichungen.

Eine Möglichkeit ein solches System zu lösen ist ein Ansatz mit **selbstähnlichen Lösungen** und geht auf das **Ähnlichkeitsgesetz** zum Beispiel in Landau & Lifšic (1974) zurück. Dieses besagt:

*Ähnliche Körper können mit nur einer dimensionslosen Variablen, die aus allen vorherigen Variablen zusammengesetzt ist, beschrieben werden. Findet man eine solche Größe, sind alle aus ihr hervorgehenden Lösungen bis auf Skalierungsfaktoren ähnlich.*

In dem hier betrachteten Fall (Gl. (3.9), Gl. (3.10) und Gl. (3.11)) kann eine solche Variable über die Abhängigkeiten  $r$ ,  $t$  und  $v_2$  gefunden werden. Diese Größe wird über

$$\xi \doteq \frac{r}{v_2 t}, \quad (3.12)$$

definiert und weiter die dimensionslosen Funktionen

$$v_r = v_2 V \quad \Sigma_2 = \Sigma_1 S \quad (3.13)$$

### 3. Numerische Tests und ihre Lösungen

eingeführt. Damit kann das System Gl. (3.11) nun zu

$$\begin{aligned}\frac{dV(\xi)}{d\xi} &= -\frac{V(\xi)}{\xi} \cdot \frac{1}{1 - \text{Ma}^2 (V(\xi) - \xi)^2} \\ \frac{dS(\xi)}{d\xi} &= \frac{S(\xi)}{\xi} \cdot \frac{\text{Ma}^2 V(\xi) (V(\xi) - \xi)}{1 - \text{Ma}^2 (V(\xi) - \xi)^2}\end{aligned}\quad (3.14)$$

umgeschrieben werden (siehe Anhang C). Dieses Differentialgleichungssystem konnte nicht mehr weiter auf bekannte Systeme zurückgeführt werden. Deshalb sind im Folgenden zwei unterschiedliche Lösungswege angegeben. Zunächst wird ein approximativer, analytischer Ausdruck für die dimensionslosen Geschwindigkeiten  $V$  und Oberflächendichten  $S$  für  $\xi \gg 1$  gesucht. Um das System aber exakt zu lösen, wird im Weiteren eine numerische Lösung vorgeschlagen.

#### analytische Näherungslösung

Die erste Gleichung des Systems Gl. (3.14) koppelt nicht mit der Oberflächendichte  $S(\xi)$ . Deshalb soll zunächst eine Lösung für  $V(\xi)$  in der Näherung  $\xi \gg 1$  gefunden werden. Man erhält damit

$$\frac{dV(\xi)}{d\xi} \stackrel{\xi \gg 1}{\approx} \frac{V(\xi)}{\text{Ma}^2 \xi^3},$$

wobei diese Differentialgleichung (DGL) direkt integriert werden kann und die Lösungsfunktion

$$V(\xi) = -V_\infty \exp\left(-\frac{1}{2\xi^2 \text{Ma}^2}\right). \quad (3.15)$$

erzeugt. Die Integrationskonstante  $V_\infty$  soll der Geschwindigkeit  $v_r(r = \infty, t) = -1$  entsprechen. Mit dieser Lösung kann nun die zweite Gleichung für  $S(\xi)$  des Systems Gl. (3.14) von  $V(\xi)$  entkoppelt werden. Unter der Forderung  $\xi \gg 1$  erhält man

$$\frac{dS(\xi)}{d\xi} \stackrel{\xi \gg 1}{\approx} \frac{S(\xi) V(\xi)}{\xi^2},$$

worin obige Lösung Gl. (3.15) eingesetzt wird. Diese DGL lautet als Integralgleichung geschrieben

$$\int_{\xi \rightarrow \infty}^{\xi} \frac{dS}{S} = \int_{\xi \rightarrow \infty}^{\xi} \frac{V_\infty \exp\left(-\frac{1}{2\xi^2 \text{Ma}^2}\right)}{\xi^2} d\xi,$$

und kann exakt mit Hilfe der  $\Gamma$ -Funktion

$$S(\xi) = S_\infty \exp \left[ \frac{|\text{Ma}| V_\infty}{\sqrt{2}} \left( \Gamma \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2\text{Ma}^2 \xi^2} \right) - \sqrt{\pi} \right) \right] \quad (3.16)$$

gelöst werden<sup>3</sup>. Die  $\Gamma$ -Funktion ist proportional zur Fehlerfunktion, weshalb die Lösung auch zu

$$S(\xi) = S_\infty \exp \left( -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \text{Ma} V_\infty \text{erf} \left( \frac{1}{\sqrt{2} \lambda \xi} \right) \right) \quad (3.17)$$

umgeschrieben werden kann. Die genaue Herleitung ist in Anhang C zu finden.

### numerische Lösung

Für die Berechnung wurde auf `ode`<sup>4</sup> zurückgegriffen, das in der Lage ist gewöhnliche Differentialgleichungssysteme numerisch zu lösen. Die numerische Lösung gewöhnlicher DGL kann beliebig genau bestimmt werden, weshalb im Folgenden von einer exakten Lösung gesprochen wird. Da solche numerischen Verfahren immer auf Anfangsdaten angewiesen sind, müssen diese neben der Genauigkeit des Verfahrens und des Start- beziehungsweise Endpunktes der Lösungen vorgegeben werden. Leider ist es aber nicht so einfach diese zu bestimmen, da die beiden RHB von den drei freien Variablen  $\Sigma_2$ ,  $v_s$  und  $v_2$  abhängen. Zunächst soll deshalb eine Abschätzung für die Mach-Zahl gemacht werden. Dazu wird Gl. (3.10) mit den dimensionslosen Funktionen Gl. (3.13) umgeschrieben. Aus Abbildung (3.3) kann man  $v_r(r_0, t) = v_2(r_0, t)$  ablesen und bestimmt somit die dimensionslose Geschwindigkeit  $V(\xi_0) = \frac{1}{2} \left( 1 - \sqrt{1 + 4\text{Ma}^{-2}} \right)$  an der Stoßfront. Weiterhin sind die Anfangsbedingungen  $V(\xi = 0) = 0$  und  $V(\xi = \infty) = V_\infty = -1$  bekannt, womit die Aussage

$$\begin{aligned} V(\xi = \infty) &< V(\xi_0) < V(\xi = 0) \\ \Leftrightarrow -1 &< 1 - \frac{1}{2} \sqrt{1 + 4\text{Ma}^{-2}} < 0 \\ \Rightarrow 2\sqrt{\frac{1}{3}} &> \text{Ma} > 0 \end{aligned}$$

<sup>3</sup>Lösung wurde mit `WXMAXIMA`, einem Open Source Computeralgebrasystem unter GNU-Lizenz berechnet

<sup>4</sup>Packet aus `GNU plotutils`, einer freien Software Bibliothek ebenfalls unter der GNU Lizenz

### 3. Numerische Tests und ihre Lösungen

getroffen werden kann. Diese Abschätzung ist immer noch sehr grob. Um jetzt geeignete Anfangsgrößen zu finden, wurde folgendermassen vorgegangen: Die Lösungen aus `hedis` sind die nicht transformierten Größen, also abhängig von  $r$  und  $t$ . Um einen Vergleich zwischen der exakten Lösung und `hedis` anstellen zu können, müssen die mit Gl. (3.12) transformierten Gleichungen zurücktransformiert werden. Der Einfachheit halber werden die Simulationsdaten aus `hedis` zur Zeit  $t = 1,0$  und am Ort  $r_0$  (mit Gl. (3.12) umgerechnet) abgelesen und als Startwerte gesetzt (siehe Tabelle 3.3).

Parameter	Größe
$r_0$	0,826
Ma	0,958
$v_2$	-0.6594
$\Sigma_1$	4.898

Tabelle 3.1.: Parameter zum Vergleich der analytischen Näherungslösung mit der exakten Lösung des Noh-Problems

Die Ergebnisse sind in Abbildung (3.4) und Abbildung (3.5) dargestellt. Die approximative analytische Lösung gilt nur für  $\xi \gg 1$  und kann eigentlich nur den Verlauf ab dem Fußpunkt  $r_0$  wiedergeben. Das heißt, dass der Grenzwert  $\lim_{\xi \rightarrow 0} S(\xi)$  nicht korrekt ist. Die größere Abweichung im Bereich  $r = r_0$  von der exakten Lösung wird mit der selben Argumentation erklärt. Da die Anfangsdaten nur mit einer endlichen Genauigkeit aus den Simulationen abgelesen werden können, ergibt sich ebenfalls eine marginale Abweichung im Verlauf  $S(\xi), V(\xi) \rightarrow \infty$ . Insgesamt kann jedoch die Richtigkeit der gefundenen Größen bestätigt werden.



### 3.3. Das isotherme Noh-Problem

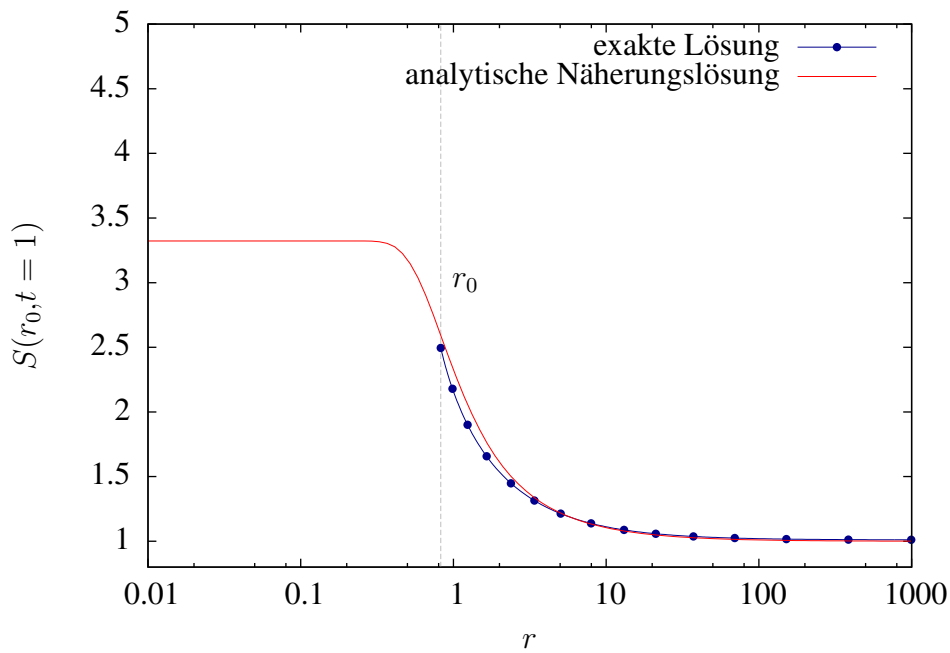


Abbildung 3.4.: Vergleich zwischen Näherungslösung und exakten Lösung der Oberflächendichte beim isothermen Noh-Problem

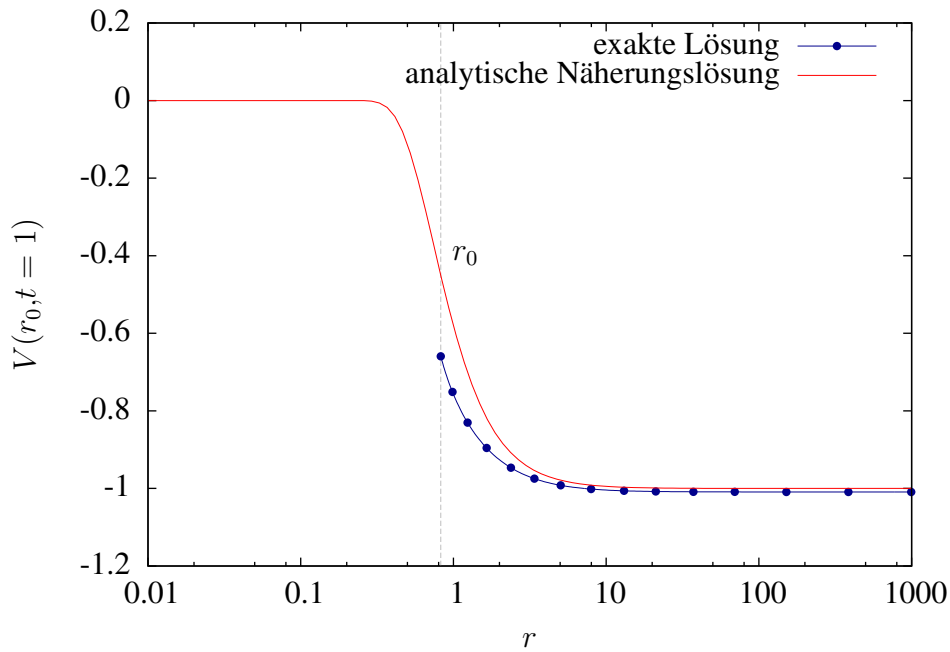


Abbildung 3.5.: Vergleich zwischen Näherungslösung und exakten Lösung der Radialgeschwindigkeit beim isothermen Noh-Problem

### 3.4. Pringle-Test

In Abschnitt 2.1.2 wurde bereits erwähnt, dass das Pringle-Modell unter gewissen Voraussetzungen eine analytische Lösung besitzt. Laut Kato et al. (2008) kann für Gl. (2.25) eine Lösung gefunden werden, indem man eine Keplersche Gravitationsbeschleunigung  $g_K$  mit zeitlich konstanter Zentralmasse, sowie eine kinematische Viskosität (Pringle-Viskosität)  $\nu^{(P)}$  proportional zum Radius ansetzt

$$\begin{aligned} g_K &= \sqrt{GM_Z r} \\ \nu^{(P)}(r) &= br. \end{aligned}$$

Die Konstante  $b$  parametrisiert die Viskosität. Weiterhin setzt man eine recht scharfe Anfangsbedingung

$$\Sigma(s, t = 0) = \Sigma_0 = \frac{M_{D,i}}{2\pi r_0} \delta(r - r_0)$$

über die „ $\delta$ -Distribution“ an und löst diese mit Hilfe der Greenschen-Funktion mit

$$\Sigma^P(\gamma, \mathcal{T}) = \frac{\Sigma_0}{2\gamma^3 \sqrt{\pi \mathcal{T}}} \left[ \exp\left(-\frac{(\gamma - 1)^2}{4\mathcal{T}}\right) - \exp\left(-\frac{(\gamma + 1)^2}{4\mathcal{T}}\right) \right], \quad (3.18)$$

wobei

$$\gamma = \sqrt{\frac{r}{r_0}}, \quad \text{und} \quad \mathcal{T} = \frac{t}{t_0}$$

gesetzt wird. Die viskose Zeitskala

$$t_0 = \frac{4r_0^2}{3\nu^{(P)}(r_0)} = \frac{4r_0}{3b}$$

ist sehr wichtig, da für einen Anfangszeitpunkt  $r_0 \neq 0$  festgelegt werden kann. Die  $\delta$ -Distribution hat die Eigenschaft an der Stelle  $r = r_0$  nicht definiert zu sein ( $\delta(0) = \infty$ ) und ansonsten den Wert Null zurückzugeben. Anders formuliert hat sie an der Stelle  $r = r_0$  die Breite Null und kann deshalb in der Numerik nicht dargestellt werden. Über die viskose Zeitskala hat man jetzt die Möglichkeit den Startzeitpunkt zu verschieben, wodurch dieses Problem umgangen werden kann. Die Größen  $r_0$ ,  $t_0$  und  $\Sigma_0$  werden als numerische Konstanten angegeben. Abbildung (3.6) zeigt die zeitliche Entwicklung obiger Lösung. Man erkennt einen „zerlaufenden“  $\delta$ -Peak der sich Richtung Zentrum

bewegt, wodurch Masse transportiert, beziehungsweise akkretiert wird. Mit Hilfe geeigneter Anfangs- und Randbedingung kann die Pringle-Lösung auch aus dem erweiterten Modell (Gl. (2.13) - Gl. (2.15)) erzeugt werden, da das Pringle-Modell aus dem erweiterten hervorgeht. Dies stellt demnach ein weiteres Testverfahren dar, welches in der Lage ist, beide Geschwindigkeitskomponenten in einem Testproblem zu prüfen.

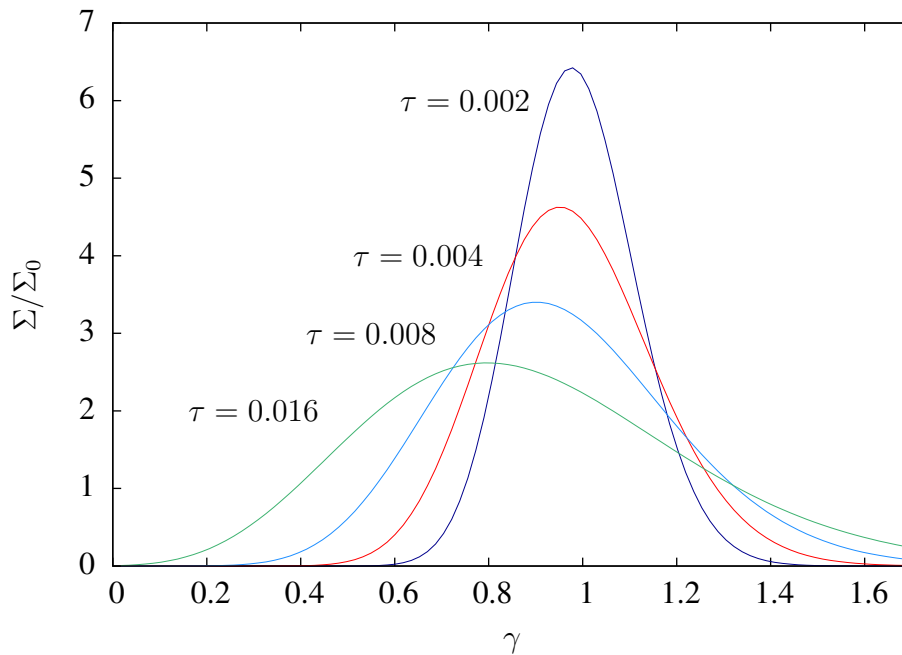


Abbildung 3.6.: zeitliche Entwicklung der Pringle-Lösung nach Kato et al. (2008). Die ursprüngliche Lösung von Pringle (1981) sieht ähnlich aus, wird aber für ein konstantes  $\nu$  abgeleitet und muss mit Bessel-Funktionen gelöst werden

## 3.5. Umbaumaßnahmen

### 3.5.1. Umbau auf echte konservative Variablen

In Abschnitt 2.1.1 wurden mit Gl. (2.17) die Variablen  $\vec{u}$  eingeführt. Diese Variablen eignen sich aufgrund ihrer Definition gut zur Diskretisierung der Flüsse und der Quellterme. Da über das DGL-System Gl. (2.16) aber Erhaltungsgleichungen gelöst werden

### 3. Numerische Tests und ihre Lösungen

sollen, erscheint es als sinnvoll diese Erhaltungsgrößen auch zur Berechnung zu verwenden. Man will also direkt mit den Größen (spezifische) Masse, Impuls und Drehimpuls hantieren und nicht wie bisher mit den durch den Skalenfaktor  $r$  verfälschten Größen. Deshalb soll im Folgenden auf **konservative Variablen** umgestellt werden. Das heißt, es wird die Transformation

$$\vec{u} \longrightarrow \vec{u}^{(kV)} = \begin{pmatrix} u_1^{(kV)} \\ u_2^{(kV)} \\ u_3^{(kV)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma \\ \Sigma v_r \\ r \Sigma v_\varphi \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

durchgeführt. Damit einhergehend ist es sinnvoll, wenn zusätzlich zu den konservativen Variablen die einzelnen physikalischen Größen  $\Sigma$ ,  $v_r$  und  $v_\varphi$  separat über

$$\vec{u}^{(pV)} = \begin{pmatrix} u_1^{(pV)} \\ u_2^{(pV)} \\ u_3^{(pV)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma \\ v_r \\ v_\varphi \end{pmatrix}, \quad (3.20)$$

den sogenannten **primitiven Variablen**, berechnet werden. Dies verhindert, dass in den Flüssen und Quelltermen überflüssige Umrechnungen gemacht werden müssen, die in jedem Falle zu Ungenauigkeiten führen. Damit kann der Flusszustandsvektor zu

$$\vec{F}(\vec{u}) = \begin{pmatrix} r \Sigma v_r \\ r \Sigma (v_r^2 + c_s^2) \\ r^2 \Sigma v_r v_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r u_2^{(kV)} \\ r \left( u_2^{(kV)} u_2^{(pV)} + u_1^{(pV)} c_s^2 \right) \\ r u_3^{(kV)} u_2^{(pV)} \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

umgeschrieben werden und der viskose Fluss wird zu

$$\begin{aligned} \vec{V}(r, \vec{u}, \vec{u}') &= \begin{pmatrix} 0 \\ \left( \bar{\zeta} + \frac{4}{3} \bar{\eta} \right) r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \left( \bar{\zeta} - \frac{2}{3} \bar{\eta} \right) v_r \\ \bar{\eta} \left( r \frac{\partial (r v_\varphi)}{\partial r} - 2 r v_\varphi \right) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ \left( \bar{\zeta} + \frac{4}{3} \bar{\eta} \right) r \frac{\partial}{\partial r} u_2^{(pV)} + \left( \bar{\zeta} - \frac{2}{3} \bar{\eta} \right) u_2^{(pV)} \\ \bar{\eta} r \left( r \frac{\partial}{\partial r} u_3^{(pV)} - u_3^{(pV)} \right) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Der Quellterm wird damit zu

$$\vec{S}(r, \vec{u}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \Sigma \left( \frac{v_\varphi^2}{r} + \frac{c_s^2}{r} + g \right) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ u_1^{(pV)} \left[ \frac{1}{r} \left( u_3^{(pV)^2} + c_s^2 \right) + g \right] \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.23)$$

vereinfacht und der viskose Quellterm

$$\begin{aligned} \vec{W}(r, \vec{u}, \vec{u}') &= \begin{pmatrix} 0 \\ -\left(\bar{\zeta} + \frac{4}{3}\bar{\eta}\right) \frac{v_r}{r^2} - \left(\bar{\zeta} - \frac{2}{3}\bar{\eta}\right) \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ -\left(\bar{\zeta} + \frac{4}{3}\bar{\eta}\right) \frac{u_2^{(pV)}}{r^2} - \left(\bar{\zeta} - \frac{2}{3}\bar{\eta}\right) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} u_2^{(pV)} \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Im Vergleich mit den Termen Gl. (2.17) - Gl. (2.21) fällt bei den auf  $\vec{u}^{(pV)}$  umgeschriebenen Ausdrücken sofort auf, dass alle Brüche, auch die in den Ableitungen, verschwinden. Bisher mussten diese über die Quotientenregel diskretisiert werden. Durch obige Transformation ist, wenn überhaupt, nur noch die Produktregel erforderlich, wofür Rückwärtsdifferenzenquotienten

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x}$$

verwendet werden. In der Entwicklungsgleichung Gl. (2.16) muss wegen der Umstellung Gl. (3.19) der Faktor  $\frac{1}{r}$  berücksichtigt werden

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \vec{F}(\vec{u})}{\partial r} - \frac{\partial \vec{V}(r, \vec{u}, \vec{u}')}{\partial r} \right) - \vec{W}(r, \vec{u}, \vec{u}') - \vec{S}(r, \vec{u}) = 0. \quad (3.25)$$

Während dieser vor den Flusstermen steht, kann er innerhalb der Quellterme verrechnet werden. Wichtig ist außerdem die Änderung in den numerischen Flüssen

$$\vec{F} \Big|_{\mathcal{L}_i} = \frac{\vec{\mathcal{F}}_{i+1/2} - \vec{\mathcal{F}}_{i-1/2}}{r \cdot \Delta V},$$

### 3. Numerische Tests und ihre Lösungen

die nach der Integration (Gl. (2.50)) zu

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{F}}_{i+1/2} &= \frac{r_{i+1/2}}{a_{i+1/2}^+ - a_{i-1/2}^-} \left[ a_{i+1/2}^+ \vec{F}(\vec{u}_{i+1/2}^{(pV,-)}) - a_{i+1/2}^- \vec{F}(\vec{u}_{i+1/2}^{(pV,+)}) \right. \\ &\quad \left. - a_{i+1/2}^+ a_{i-1/2}^- \left( \vec{u}_{i+1/2}^{(kV,-)} - \vec{u}_{i+1/2}^{(kV,+)} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.26)$$

abgeändert werden muss. Bei der Umstellung auf konservative Variablen ist es sinnvoll diese zentral in einer eigenen Routine (`calc_primtocons.c`) zusammen mit den primitiven Variablen zu berechnen, so dass sie überall in `hedis` zur Verfügung stehen, wenn sie gebraucht werden. Aufgrund dieser neuen Routine muss man auch den Ablauf innerhalb des Codes etwas abändern. Die Anfangsbedingungen und die Randbedingung sind jetzt über die primitiven Größen  $\Sigma$ ,  $v_r$  und  $v_\varphi$  vorgegeben. Wie zu Beginn dieses Abschnittes erwähnt will man mit den reinen Erhaltungsgrößen rechnen, weshalb für die Zeitintegration natürlich die  $\vec{u}^{(kV)}$  verwendet werden sollten. Es ist ebenfalls sinnvoll die Berechnung der Zeitschrittweite auf diesen Variablensatz umzuschreiben, womit jetzt der Kern des numerischen Verfahrens in `hedis` transformiert ist. Natürlich müssen noch alle peripheren Routinen, wie zum Beispiel die Viskositäts-, oder die Massenberechnung abgeändert werden.

#### 3.5.2. Erweitern auf zweite Geisterzelle (GZ) und Rekonstruktion

In Abschnitt 2.7 wurde darauf hingewiesen, dass RB essentiell zum Lösen partieller Differentialgleichungssysteme sind und ein numerisches Verfahren stark beeinflussen können. Um RB überhaupt setzen zu können, muss das numerische Rechengitter größer als das über  $\mathcal{L}_i \in [r_{\min}, r_{\max}]$  definierte Gebiet sein, was man über sogenannte Geisterzellen realisieren kann. Als Beispiel kann man die Limiter-Funktion Gl. (2.52) am Innenrand  $r_{\min} = r_{1/2}$ , also an der Stelle  $i = 0$  auswerten. Man greift hier automatisch auf den Zellmittelpunkt an der Stelle  $i = -1$  zu, wobei diese Stelle bisher nur mit einer Null vorgegeben ist. Da die Steigung über diesen Zellrand dadurch künstlich auf Null gesetzt wird (siehe Definition der `minmod`-Funktion in Abschnitt 2.7), könnte dies die Ursache für auftretende Oszillationen am Innenrand sein.

In `hedis` werden der Innenrand  $r_{\min}$ , sowie der Außenrand  $r_{\max}$  als Anfangsparameter

angegeben. Um eine zweite GZ einzuführen, muss jedoch der Bereich der Verteilungsfunktion Gl. (2.48), welche die Zellwände, beziehungsweise das Rechengitter setzt, von

$$i \in [-1, \dots, N + 1] \longrightarrow i \in [-2, \dots, N + 2]$$

erweitert werden. Dadurch ändert sich nicht das Rechengebiet  $\mathcal{L}_i$ , sondern nur jeweils die Außenbereiche (siehe Abbildung (2.5)).

Diese Änderung und die neuen Variablensätze finden vor allem in der Rekonstruktion Anwendung. Dort müssen zum einen natürlich alle Arrays angepasst werden, um den Zugriff auf die neuen Zellen zu ermöglichen. Zum anderen wird die Rekonstruktion so umgebaut, dass sie entweder generell über primitive, oder über konservative Variablen berechnet werden kann. Welchen Variablensatz man verwendet ist hier eigentlich unwichtig, sie dürfen nur nicht vermischt werden und können über einen Schalter ausgewählt werden.

#### 3.5.3. Anpassen der Randbedingung (RB)

Es gibt viele verschiedene Typen von RB, die hier in zwei Klassen unterteilt werden, nämlich in reflektierende und nichtreflektierende Ränder. Um deren Funktion zu verstehen, sollen die in `hedis` verwendeten RB kurz erläutert werden.

- **reflektierende RB** dürfen keine Flüsse über die Ränder zulassen. Wie man Gl. (2.23) für den Massenfluss entnehmen kann, wird Masse über die radiale Geschwindigkeitskomponente transportiert. Somit ist klar, dass die  $\vec{u}_2$ -Komponente aus den (konservativen) Variablen an den Rändern eine Bedingung enthalten muss, die dieses Verhalten verhindert. Eine Möglichkeit liegt darin, den Wert in der ersten Zelle auf den Wert in der ersten GZ mit umgekehrtem Vorzeichen zu kopieren. Die Größen  $\vec{u}_1$  und  $\vec{u}_3$  werden direkt kopiert.
- **nichtreflektierende RB** erlauben ein zu- oder abfließen der Flüsse über die Ränder. In `hedis` sind zum einen die RB nach Giles (1988), welche mit Hilfe eines vereinfachten Gleichungssystem (Gl. (2.13) - Gl. (2.15)) aus den Größen im Rechengitter berechnet werden, implementiert und können in der Arbeit von Blank (2010) nachgelesen werden. Zum Anderen gibt es die sogenannten **No-**

### 3. Numerische Tests und ihre Lösungen

**Gradients-RB.** Hier werden alle Größen, also auch die  $\vec{u}_2$ -Komponente, wie bei den reflektierenden RB aus dem Rechengebiet direkt in die GZ kopiert.

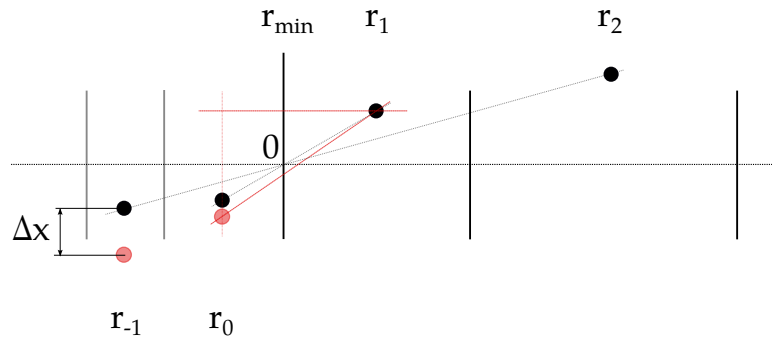


Abbildung 3.7.: Rechengitter am Innenrand und der Fehler, der durch einfaches Kopieren der Zellgrößen erzeugt wird

Abbildung (3.7) zeigt, dass bei den einfachen reflektierenden RB aufgrund des logarithmischen Gitters ein Fehler erzeugt wird, der dennoch einen Fluss über den Rand zulässt. Die roten Größen sind die einfach kopierten Größen. Man erkennt, dass die Steigung, über welche die Werte an den Zellrändern berechnet werden, nicht Null ist. Um eben dies zu gewährleisten, wird der Wert aus der ersten Zelle linear über die Null approximiert. Somit entsteht beim „nullten“ Zeitschritt kein radialer Fluss mehr über den Innenrand. Über Gl. (2.53) kann gezeigt werden, dass es aufgrund der numerischen Viskosität immer einen Impulsfluss geben muss. Trotzdem können damit gute Ergebnisse erzielt werden.

Das gleiche Problem tritt auch bei den No-Gradients RB auf, nur dass diese als nicht-



reflektierende Ränder Flüsse über den Innenrand zulassen sollen. Hierbei darf es aber eigentlich keine Einflüsse aus den GZ ins Rechengebiet hinein geben. Um dies zu verhindern werden bei Sperling (2013) sogenannte Kepler-RB vorgeschlagen. Diese extrapolieren zunächst die Größen aus dem Rechengebiet auf die GZ. Danach wird über die Richtung der Radialgeschwindigkeit entschieden, ob ein Ein- oder Ausfluss vorliegt. Liegt ein Ausfluss vor, werden die Größen wie oben erklärt extrapoliert. Liegt wiederum ein Einfluss vor, so werden die Größen in den GZ auf die lokale Kepler-Geschwindigkeit gesetzt. Dies stellt im Allgemeinen eine gute Näherung für die Simulation von Akkretionsscheiben dar.

Sind die analytischen Lösungen eines Problems bekannt, können diese als „**exakte**“ **RB** in den GZ gesetzt werden. Hier gilt es allerdings immer zu beachten, dass sie nur für spezielle Probleme gültig sind. Die Ränder für den isothermen Vortex und für die Pringle-Lösung können auf diese Weise gesetzt werden, wobei auch andere RB denkbar sind. Das Noh-Problem verwendet zum Teil exakte Lösungen und reflektierende Ränder. Da im vorigen Abschnitt erklärt wurde, dass `hedis` auf eine zweite GZ erweitert wurde, müssen natürlich auch alle vorliegenden RB für diese neuen Positionen gesetzt werden. Außerdem muss beachtet werden, dass die Ränder jetzt als primitive Größen angegeben werden müssen.

#### 3.5.4. Limiter-Funktionen

In Abschnitt 2.7 wurde der **minmod-Limiter** eingeführt. Im Rahmen der Umstellung auf echte konservative Variablen wurden ebenfalls weitere Limiter-Funktionen implementiert, da sich diese in ihren Eigenschaften unterscheiden. Der **minmod-Limiter** hat die Eigenschaft sehr dispersiv zu sein. Das heißt, dass er die Dichtegradienten grob begrenzt und somit mögliche Oszillationen in der Lösung stark glättet. Den Gegenteiligen Effekt erreicht man mit dem sogenannten **superbee-Limiter**. Dieser glättet die Lösungen weniger stark, bildet dafür aber den Dichtegradienten sehr gut ab und ist nach Roe (1986) über

$$\text{superbee}(a,b) = \begin{cases} \text{sgn}(a) \cdot \min(|a|, |b|, \frac{1}{2} \max(|a|, |b|)), & \text{wenn } ab > 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

### 3. Numerische Tests und ihre Lösungen

definiert. Die allgemeinste Limiter-Funktion stellt wohl der sogenannte **monotoniced-centred (mc)-Limiter** dar. Um diesen zu definieren, schreibt man Gl. (2.52) für drei (oder auch mehrere) Argumente um

$$\text{minmod}(a_1, \dots, a_n) = \begin{cases} \min(|a_1|, \dots, |a_n|), & \text{falls } a_1 \cdot \dots \cdot a_n > 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

und definiert den mc-Limiter über

$$\text{mc} \left( \frac{\vec{u}_i - \vec{u}_{i-1}}{\Delta r_{i-1/2}}, \frac{\vec{u}_{i+1} - \vec{u}_{i-1}}{2\Delta r_{i-1/2}}, \frac{\vec{u}_{i+1} - \vec{u}_i}{\Delta r_{i+1}} \right) \doteq \text{minmod} \left( \theta \frac{\vec{u}_i - \vec{u}_{i-1}}{\Delta r_{i-1/2}}, \frac{\vec{u}_{i+1} - \vec{u}_{i-1}}{2\Delta r_{i-1/2}}, \theta \frac{\vec{u}_{i+1} - \vec{u}_i}{\Delta r_{i+1}} \right).$$

Das interessante hierbei ist der Parameter  $\theta \in [1; 2]$ , der eine künstliche Viskosität einstellt. Für  $\theta = 1$  geht der mc- in den minmod-Limiter über und für  $\theta = 2$  in den superbee. Über diesen Parameter ermöglicht man es, die Dispersivität variabel einzustellen, wobei nach Kurganov & Tadmor (2000) optimale Ergebnisse für ein  $\theta$  zwischen 1 und 1,5 erreicht werden. In `hedis` wurde ein Wert  $\theta = 1,2$  gewählt.

### 3.5.5. Implizite Zeitschrittberechnung für stationäre Probleme

Die implizite Zeitschrittberechnung stellt bei allen stationären Anwendungsfällen ein Problem dar. Im Gegensatz zur expliziten Zeitschrittberechnung ist man nicht an die CFL-Zahl gebunden, die ein numerisch stabiles Verfahren sicherstellt (Courant et al., 1928). Sie garantiert, dass innerhalb eines Zeitschrittes keine Information aus einem Zellmittelpunkt zu einem benachbarten Zellmittelpunkt gelangen kann. Beim impliziten Verfahren, verwendet man eine Maximums-Funktion

$$\Delta t_{\text{ITW}} = \max \left( \Delta t_{\text{CFL}}, \frac{c_{\text{ITW}}}{\epsilon} \Delta t^* \right), \quad (3.27)$$

und darin den CFL-Zeitschritt als minimal möglichen Zeitschritt. Ansonsten wählt die Funktion einen impliziten Zeitschritt, der sich aus einer Konstanten  $c_{\text{ITW}} = 0,01$  und

dem vorherigen Zeitschritt  $\Delta t^*$  zusammensetzt. Außerdem findet der Parameter

$$\epsilon = \max_{i \in \{0, \dots, N+1\}} \left| 1 - \frac{u_{1,i}^*}{u_{1,i}} \right|$$

Anwendung, der über das Verhältnis der Flächendichten des vorherigen und des aktuellen Zeitschrittes  $u_{1,i}^*/u_{1,i}$  berechnet wird. Kritisch ist hierbei, dass  $\epsilon$  eine Null erzeugen kann und Gl. (3.27) keine Zahl mehr zurück gibt. Dieses Verhalten wird vor allem bei stationären Problemen wie zum Beispiel dem isothermen Vortex, oder bei sehr diffusiven Problemen mit sehr geringer Viskosität erzeugt.

Eine Idee zur Lösung dieses Problems liegt darin, die Zeitschrittweite auch hier zu begrenzen. Dazu kann eine lineare Funktion

$$\Delta t_{ITW}(\Delta t^*) = \frac{c_{CFL}}{c_{ITW}} + c_{up} \Delta t^*$$

$$\Delta t_{\min} = \min(\Delta t_{ITW}(\Delta t^*), c_{itw, \max}) \quad (3.28)$$

definiert werden. Diese Funktion soll also mit  $\Delta t^*$ , der Zeitschrittweite des letzten Zeitschritts, anwachsen. Die neu eingeführte Konstante  $c_{up}$  gibt dabei die Steigung an. Die Minimum-Funktion sorgt dafür, dass der kleinste Zeitschritt mindestens der zweiten neuen Konstante  $c_{itw, \max}$  entspricht. Sie begrenzt den maximalen Zeitschritt, den das implizite Integrationsverfahren verwenden darf. Die echte Zeitschrittweite wird jetzt etwas komplizierter bestimmt:

$$\Delta t = \min \left( \Delta t_{\min}, \max \left( \Delta t_{CFL}, \frac{c_{ITW}}{\epsilon} \Delta t^* \right) \right).$$

Es wird also die alte implizite Zeitschrittweite Gl. (3.27) mit der neuen Gl. (3.28) verglichen und die kleinere der beiden ausgewählt. Damit verhindert man einerseits einen größeren Zeitschritt als durch die Konstante  $c_{itw, \max}$  angegeben und andererseits, dass die mögliche Singularität in Gl. (3.27) keine Auswirkungen auf das Verfahren hat. Wie die beiden neuen Größen dimensioniert sind, wird im Kapitel 4 bei den betroffenen Testverfahren angegeben.

### *3. Numerische Tests und ihre Lösungen*

## 4. Simulationen

Die in Kapitel 3 vorgestellten Tests werden im Folgenden nun auf das erweiterte Modell angewendet. Die Ergebnisse werden dann für die implizite und explizite Zeitintegration verglichen. Weiterhin werden die gemachten Änderungen aus Abschnitt 3.5 über die gleichen Tests auf ihre Richtigkeit überprüft. Man wird sehen, dass diese Änderungen fast immer zu einer Verbesserung des numerischen Verfahrens führen. Weiter werden die Ergebnisse zur Beantwortung der Themenfrage aus dem Pringle-Modell vorgestellt.

### 4.1. Testergebnisse

Alle Testverfahren können in `hedis` über eine Reihe freier Parameter eingestellt werden. Viele davon sind für alle Tests gleich, da ihre grundlegende Funktion immer gegeben sein muss. Diese sind zusammen mit den wählbaren Modi in Tabelle 4.1 angegeben. Alle weiteren Parameter die durchaus unterschiedlich eingestellt sein können, werden dann immer zum Anfang der einzelnen Tests angegeben. Des Weiteren werden neue Indizes verwendet. Der Index  $X_V$  zeigt an, dass die Variablen Gl. (2.17) für die Simulation verwendet wurden und für den Index  $X_{KV}$  gelten die konservativen Variablen aus Gl. (3.19). Es bleibt noch zu bemerken, dass bisher alle Testprobleme, mit Ausnahme des Pringle-Tests, dimensionslos abgeleitet wurden. Dies wird dann in Abschnitt 4.1.4 ausgeführt.

#### 4.1.1. Das hydrostatische Problem

Für das hydrostatische Problem verwendet man No-Gradients-Randbedingung, welche die Größen aus dem Rechengebiet einfach in die GZ fortsetzen. Es sind aber auch andere RB denkbar. Als Anfangsbedingungen werden die konstanten Größen (siehe Abschnitt

#### 4. Simulationen

Parameter	Größe	Modus	Art
$c_s$	1		
$t_{\text{end}}$	100		
$\theta$	1,2		
$c_{\text{CFL}}$	0,1	Limiter	minmod
$c_{\text{ITW}}$	0,01	Variablensatz	prim. Variablen
$c_{\text{up}}$	100	Modell	erw. Modell
$c_{\text{ITW,max}}$	200	Mittelwert	geometrisch
$N$	400	Schema	upwind
$\text{num}_{\text{Visk}}$	1,0	Geisterzelle	zwei GZ

Tabelle 4.1.: Parameter und Modi, die bei allen Testproblemen nicht geändert werden

3.1) gesetzt. In Abbildung (4.1) werden die über das explizite Zeitintegrationsverfahren erzeugten Größen Oberflächendichte, Radial- und Azimutalgeschwindigkeit vor dem Umbau mit den Lösungen nach dem Umbau verglichen. Die Oberflächendichte steigt

Parameter	Größe	Modus	Art
$r_{\text{min}}$	$10^{-2}$	GZ ( $v$ )	eine GZ
$r_{\text{max}}$	5	GZ ( $n$ )	zwei GZ
$N$	100	RB	no-gradients RB
		Anfangsbedingung (AB)	$\Sigma = 1, v_r = 0, v_\varphi = 0$

Tabelle 4.2.: Parameter für das hydrostatische Testverfahren

nach bereits  $\approx 47$  Zeiteinheiten (bis zum Abbruch der Simulation!) enorm stark an. Die Radialgeschwindigkeit weicht am Innenrand, sowie am Außenrand ebenfalls relativ stark von der eigentlich konstanten Lösung ab.

Einzig die Azimutalgeschwindigkeit bleibt über die gesamte Zeit stabil, wobei die Linien exakt überlagert sind. In Abbildung (4.2) sind die Ergebnisse für das implizite Verfahren gezeigt.  $\Sigma_V$  weicht ähnlich stark wie das explizite Verfahren von der eigentlichen Lösung ab. Für  $v_{r,v}$  hingegen kann ein Faktor  $\approx 10$  für die Abweichung zwischen dem expliziten und impliziten Verfahren abgelesen werden. Die Azimutalgeschwindigkeit bleibt stationär. Nach dem Umbau werden sehr gute Lösungen erzeugt. Die Dichte sowie die Azimutalgeschwindigkeit bleiben stabil, einzig die Radialgeschwindigkeit weicht etwas von ihrem stationären Zustand ab. In Abbildung (4.1) ist die Abweichung extrem gering, bei circa ( $\approx 10^{-13}$ ). Die Radialgeschwindigkeit in Abbildung (4.2) bildet

#### 4.1. Testergebnisse

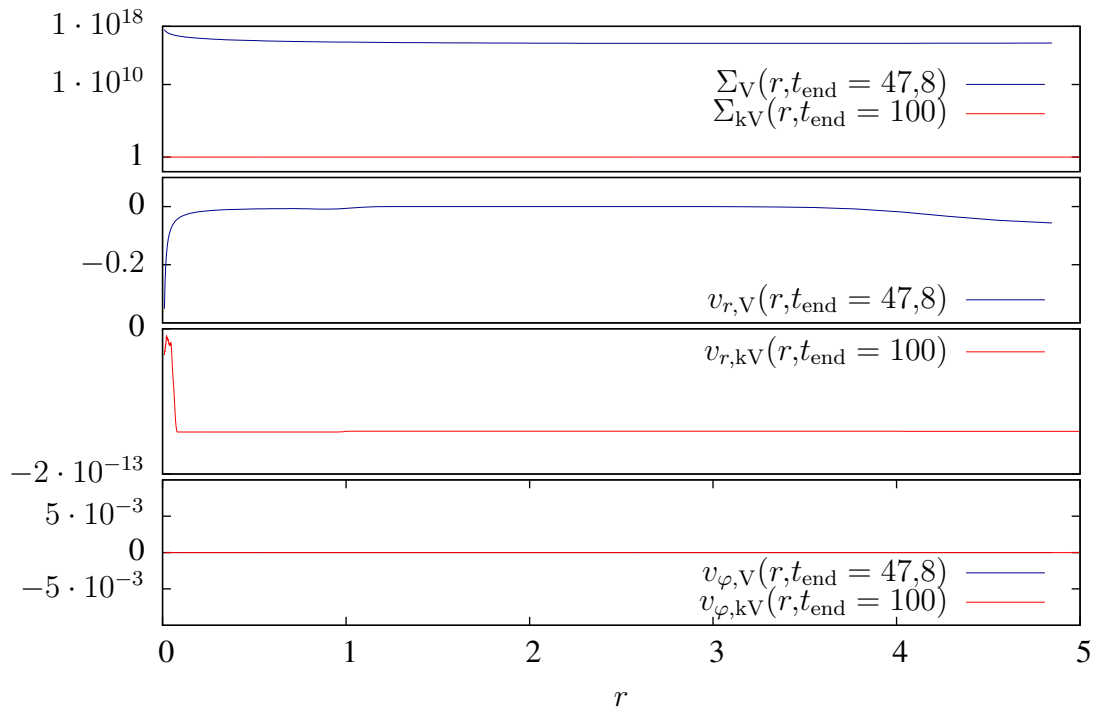


Abbildung 4.1.: Vergleich der Größen  $\Sigma$ ,  $v_r$  und  $v_\phi$  aus dem hydrostatischen Test, die mit dem expliziten Zeitintegrationsverfahren berechnet wurden

#### 4. Simulationen

im Laufe der Zeit eine negative Steigung aus, liegt aber in einem noch kleineren Bereich als beim expliziten Verfahren, so dass sie ebenfalls als stabil angesehen werden kann. Die Umbaumaßnahmen zeigen bereits hier eine enorme Verbesserung in Funktionsweise und Stabilität von `hedis`, was man im Vergleich der Variablen mit den konservativen Variablen sieht. Ebenfalls kann jetzt die vorgegebene Zeit von 100 Zeiteinheiten berechnet werden.

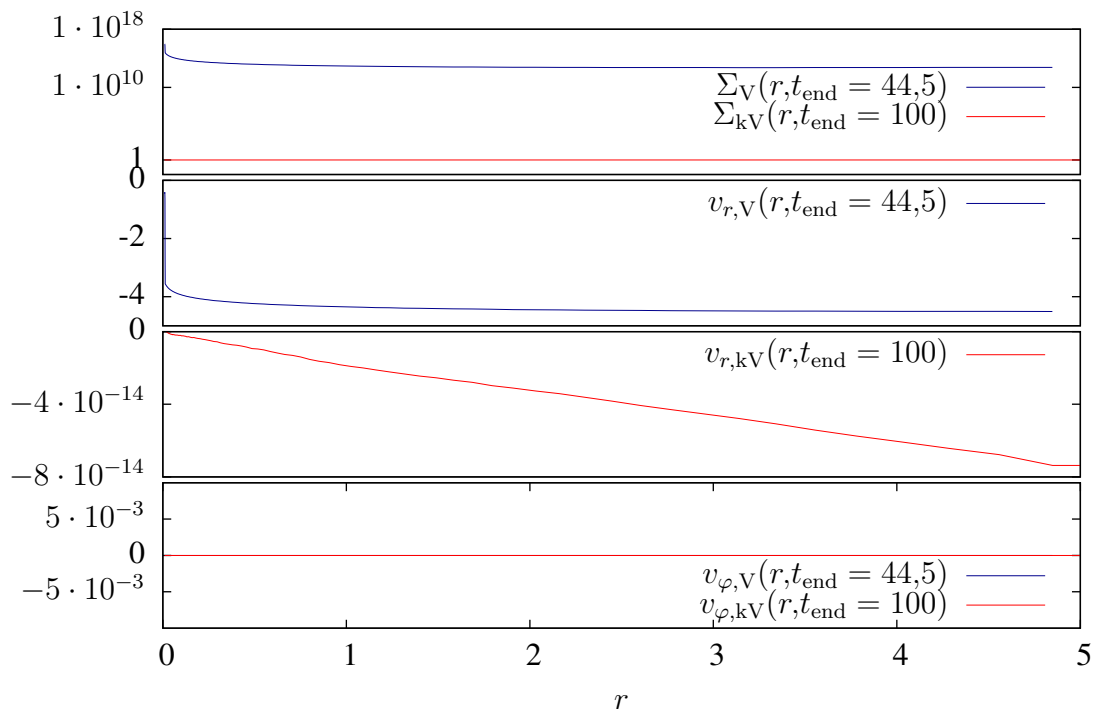


Abbildung 4.2.: Vergleich der Größen  $\Sigma$ ,  $v_r$  und  $v_\phi$  aus dem hydrostatischen Test, die mit dem impliziten Zeitintegrationsverfahren berechnet wurden

#### 4.1.2. Der isotherme Vortex

Der isotherme Vortex stellt sehr viel höhere Ansprüche an `hedis`, weil ausschließlich die Azimutalkomponenten betrachtet werden und die erzeugten Lösungen nicht einfach konstant wie beim hydrostatischen Problem sind. Wird  $v_\phi$  richtig berechnet, kann man davon ausgehen, dass auch die Drehimpulserhaltung gut wiedergegeben wird. Wie immer ist die Wahl der RB entscheidend. Werden diese falsch gesetzt, kann der Wirbel



sehr schnell zerfließen. Die Ursache hierfür sind über die Ränder generierte Massen- oder Drehimpulsflüsse, die einen Massenzu- oder Abfluss beziehungsweise Drehimpulstransport erzeugen und unbedingt verhindert werden müssen. Die Anfangsparameter können aus Tabelle 4.3 entnommen werden, wobei  $v$  für vor dem Umbau und  $n$  für nach dem Umbau steht. Als Anfangsbedingungen wurden die analytischen Ausdrücke Gl. (3.3) und Gl. (3.4) verwendet und Nicht Reflektierende Randbedingungen gesetzt.

Parameter	Größe	Modus	Art
$r_{\min}$	$10^{-2}$	GZ ( $v$ )	eine GZ
$r_{\max}$	5	GZ ( $n$ )	zwei GZ
$N(v)$	400 expl. und impl.	RB	reflektierende RB
$N(n)$	400 expl. und 150 impl.		
stationäres Problem	siehe Abschnitt 3.5.5	AB	Gl. (3.3), Gl. (3.4), $v_r = 0$

Tabelle 4.3.: Parameter und Modi für den isothermen Vortex  $v$  vor Umbau,  $n$  nach Umbau

Die Ergebnisse des Tests sind in Abbildung (4.3) (explizite Zeitintegration) und Abbildung (4.4) (implizite Zeitintegration) dargestellt. Es wurde jeweils die Winkelgeschwindigkeit  $\Omega$  und die Azimutalgeschwindigkeit  $v_\varphi$  getrennt angegeben, um zu zeigen, dass die relativ große Abweichung von  $\Omega$  am Innenrand nur ein Skalierungsproblem ist. Im Vergleich zu  $v_\varphi$  ist die Winkelgeschwindigkeit eine abgeleitete Größe, die über Gl. (3.2) berechnet werden muss. Mit dem alten Variablensatz konnte innerhalb der vorgegebenen Zeiteinheit (100) nicht simuliert werden. Bei der expliziten Zeitintegration wurden circa 50, beim impliziten circa 16 Zeiteinheiten vor dem Abbruch erreicht. Man erkennt in Abbildung (4.3), dass die Oberflächendichte enorm von der analytischen Lösung abweicht. Vor allem die Ränder heben sich enorm von der exakten Lösung ab. Da dem System keine Masse zugeführt werden kann, könnte dies auf einen Drehimpulstransport, der an den Rändern generiert wird, zurückgeführt werden. Die Winkelgeschwindigkeit wird ab dem Ort  $r_d \approx 1$  gut wiedergegeben. Am Innenrand hat sie nichts mehr mit der analytischen Lösung zu tun. Auch wenn man direkt die Azimutalgeschwindigkeit betrachtet, ändert sich dieses Verhalten nicht. Da man sowieso eher ein Zerfließen, oder eine Abschwächung der Größen im Laufe der Zeit erwartet, zeigen die Simulationsergebnisse auch ein falsches Verhalten auf. Die über das implizite Verfahren in Abbildung (4.4) erzeugten Lösungen zeigen dieses gewünschte Verhalten zumindest für  $\Sigma_d$ . Das Verhalten der Geschwindigkeit ähnelt der aus Abbildung (4.3) sehr, wobei man schwächere

#### 4. Simulationen

Abweichung ausmachen kann. Im Ganzen muss aber gesagt werden, dass dieses Test-Problem nahezu völlig instabil ist, da weder die geforderten Simulationszeiten, noch die gewünschte Stationarität erreicht werden können. Da die Verwendung anderer RB keine weiteren Verbesserungen aufwies, lag es nahe, den Fehler im Verfahren zu suchen. Wieder können die Umbaumaßnahmen gerechtfertigt werden. Die Ergebnisse in Abbildung (4.3) und Abbildung (4.4) demonstrieren dies erneut. Die Oberflächendichte weicht nur minimal von dem analytischen Ausdruck ab. Die Abweichung der Winkelgeschwindigkeit am Innenrand konnte (explizit) stark verringert werden, in der azimuthalen Komponente ist sie minimal. Beim impliziten Verfahren unterscheidet sie sich nicht mehr.

Dort wurde natürlich eine neue Zeitschrittweitenberechnung nach Abschnitt 3.5.5 verwendet. Die Ergebnisse sind der besseren Vergleichbarkeit halber nochmals in Abbildung (4.5) dargestellt. Dort werden sie nicht nur mit dem analytischen Ausdruck, sondern auch mit den numerischen Ergebnissen aus `fosite` verglichen. Die Ergebnisse weisen eine sehr hohe Stabilität auf. Allerdings wurden sie auch mit einer Auflösung von  $N = 400$  erstellt. Die expliziten Daten der Winkelgeschwindigkeit  $\Omega_{kV}$  unterscheiden sich etwas von der exakten Lösung am Innenrand, zeigen aber trotzdem verwertbare Ergebnisse (vor allem im Vergleich vor den alten Variablen). Die impliziten Daten zeigen mit geringerer Auflösung ( $N = 150$ ) erstaunlich gute Ergebnisse. Die Verringerung der Auflösung nach dem Umbau kommt daher, dass mit hoher Auflösung die Zeitschritte extrem klein wurden und das Programm zum Abbruch brachten (siehe Abschnitt 5.1). Dies wird seine Ursache wahrscheinlich an der neu eingeführten Zeitschrittweitenberechnung haben. Insgesamt muss jedoch gesagt werden, dass alle Umbaumaßnahmen bisher nur Verbesserungen eingebracht haben.

Zur Vergleichbarkeit soll noch Folgendes angemerkt werden:

Um sichtbar zu machen, was es bedeutet, wenn von einem stabilen numerischen Verfahren geredet wird, ist es sinnvoll anstatt der simulierten Zeit die Anzahl der Umläufe  $n$  anzugeben. Das heißt, dass man sich bildlich ein Fluidelement vorstellen kann, das um die  $z$ -Achse rotiert<sup>1</sup>. Da in `hedis` die Zeit eingestellt werden muss, nach der ein Rechenzyklus abgeschlossen sein soll, kann mit den Anfangsparametern aus Tabelle 4.3

---

<sup>1</sup>da das System auf nur eine Dimension reduziert wurde, ist die Rotation nur durch die 1 + eindimensionale Anschauung möglich

und mit Gl. (3.5) über

$$\begin{aligned} t_{\text{end}} &= n \cdot \tau_{\Omega} \approx 17,11 \\ \Rightarrow n &= \frac{t_{\text{end}}}{\tau_{\Omega}} \stackrel{t_s=100}{\approx} 5 \end{aligned} \quad (4.1)$$

auf die Anzahl der Umläufe  $n$  geschlossen werden. In Gl. (4.1) wurde die Anzahl der Zeitschritte verwendet, womit man die Aussage erhält dass man innerhalb 100 Zeitschritten etwa 5 Umdrehungen schafft.

#### 4. Simulationen

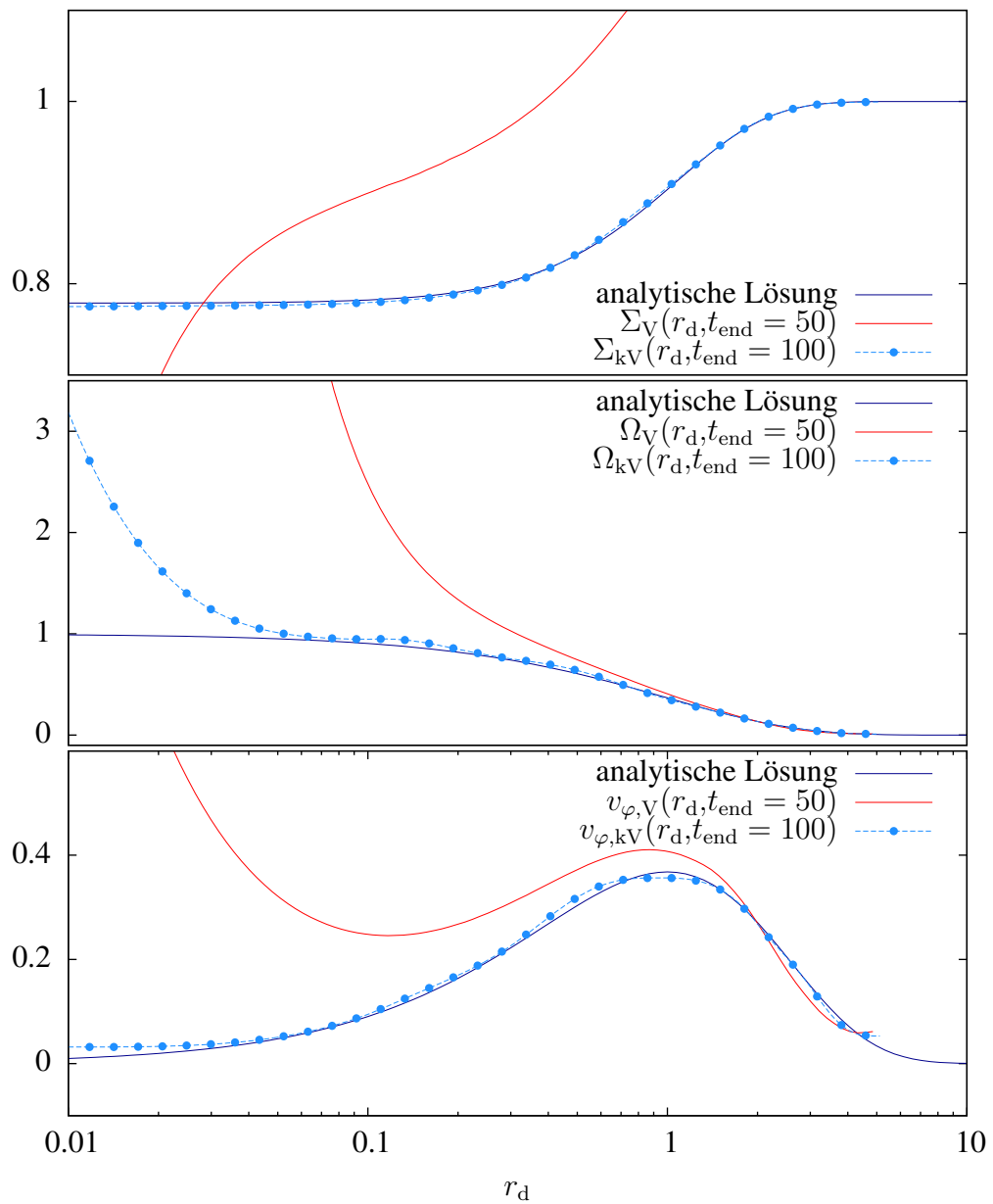


Abbildung 4.3.: Vergleich zwischen den analytischen Lösungen des isothermen Vortex und den über das explizite Zeitintegrationsverfahren berechneten Lösungen mit verschiedenen Variablensätzen

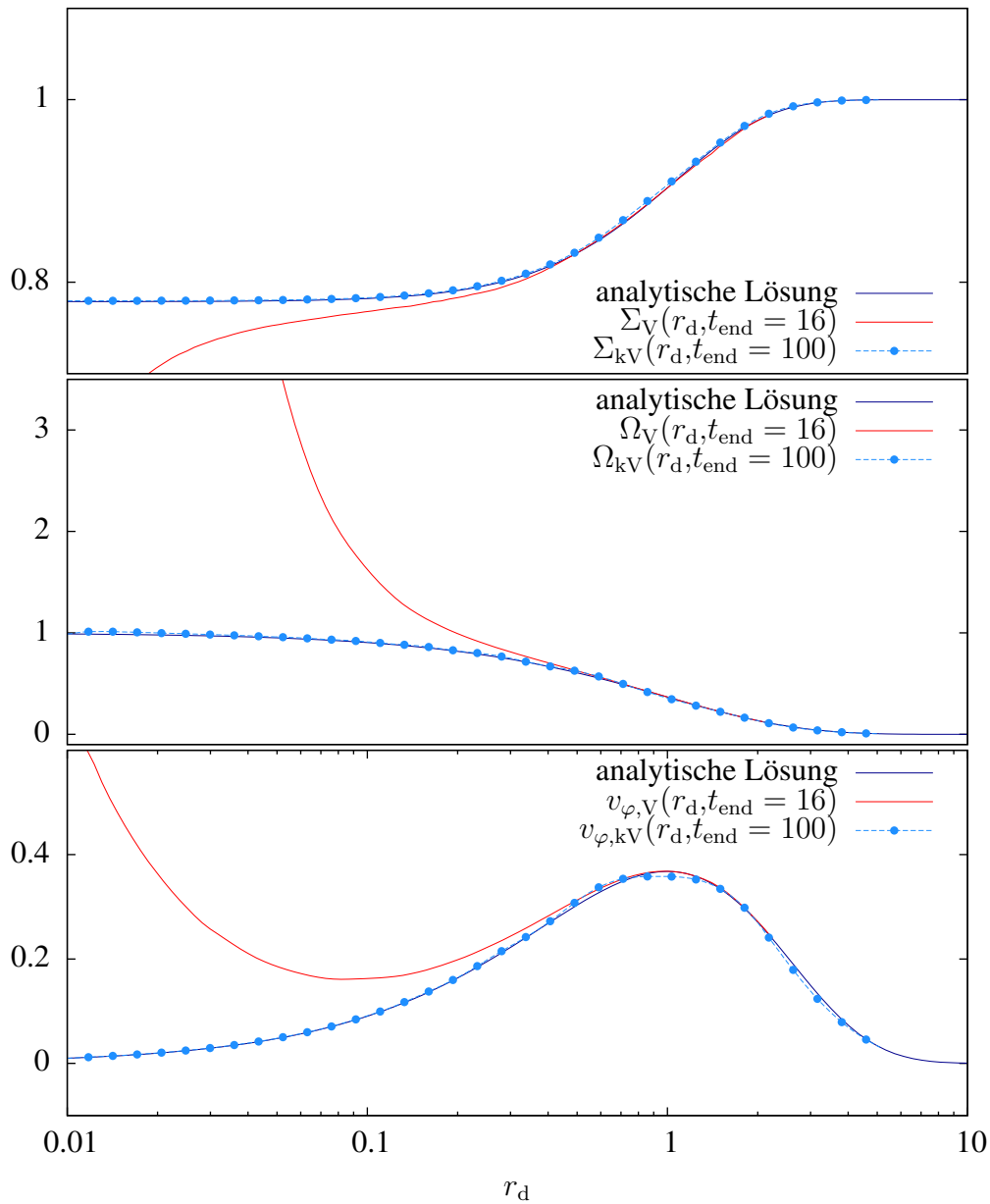


Abbildung 4.4.: Vergleich zwischen den analytischen Lösungen des isothermen Vortex und den über das implizite Zeitintegrationsverfahren berechneten Lösungen mit verschiedenen Variablensätzen

#### 4. Simulationen

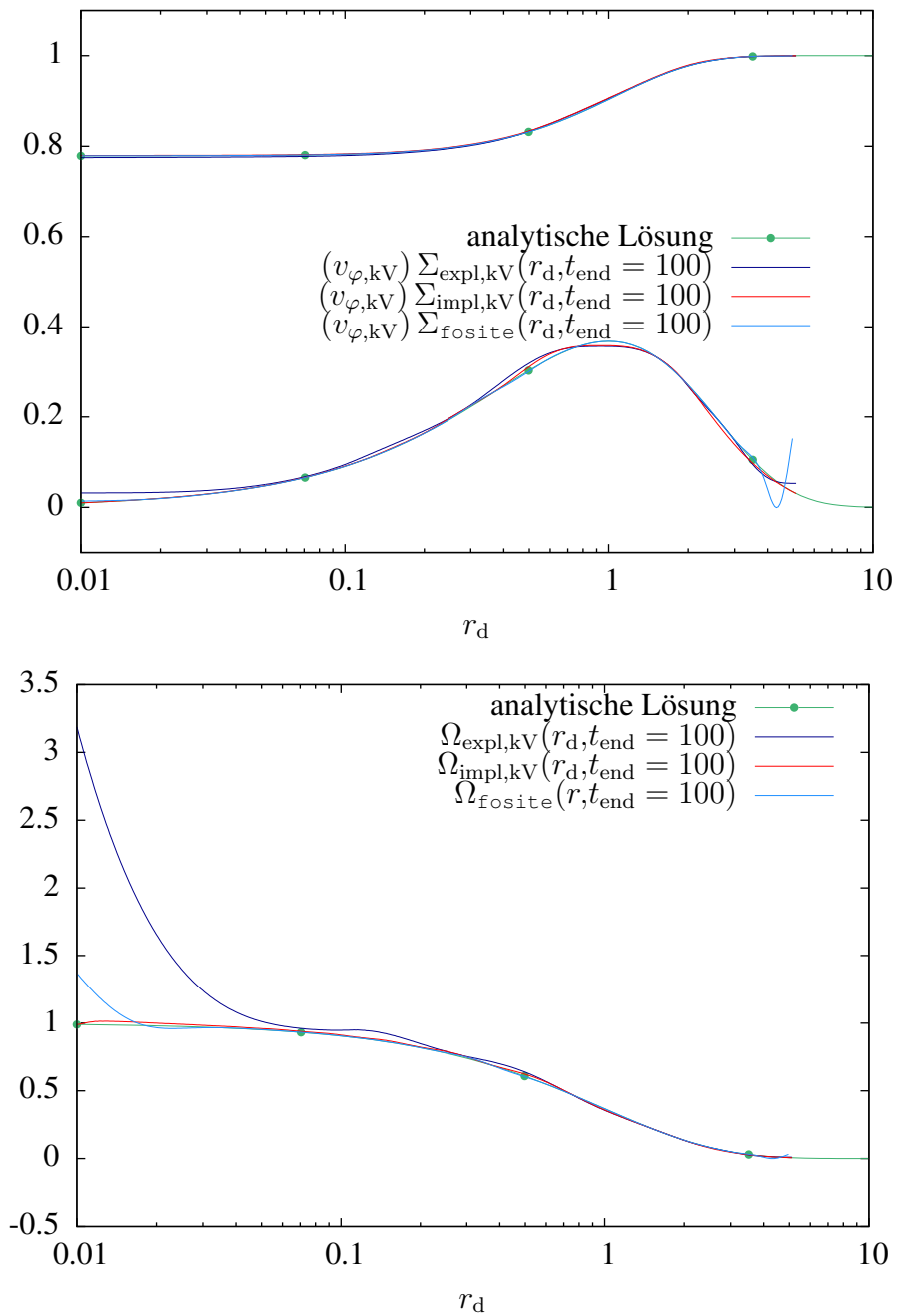


Abbildung 4.5.: Gegenüberstellung der Ergebnisse aus *hedis*, *fosite* und der analytischen Lösungen mit den konservativen Variablen. Aufgrund der sehr guten Übereinstimmung kann der Umbau, sowie die Funktionsweise bezüglich der Azimutalgeschwindigkeit von *hedis* verifiziert werden.

### 4.1.3. Das isotherme Noh-Problem

Das Noh-Problem lief bereits durch das Anpassen der RB. Es braucht reflektierende Ränder, da kein Material verloren gehen soll. Wählt man jedoch normale reflektierende Ränder, so staut sich am Außenrand Material an. Um dies zu vermeiden, können die analytischen Lösungen

$$\Sigma(r = \infty, t) = 1, \quad v_r(r = \infty, t) = -1$$

verwendet werden und man setzt den Außenrand  $r_{\max}$  extrem weit weg. Letzteres hat ebenfalls den Vorteil, dass man das Gebiet für die Lösung nicht künstlich begrenzt. Das Noh-Problem benutzt die konstanten Anfangsbedingungen aus Tabelle 4.4, wobei

Parameter	Größe	Modus	Art
$r_{\min}$	$10^{-2}$	GZ ( $v$ )	eine GZ
$r_{\max}$	1000	GZ ( $n$ )	zwei GZ
$N$	150	RB	reflektierende (exakte) RB
		AB	$\Sigma(r = \infty, t) = 1, v_r(r = \infty, t) = -1, v_\varphi = 0$

Tabelle 4.4.: Parameter und Modi für das Noh-Problem

sich bereits nach dem ersten Zeitschritt eine Entwicklung einstellt. Diese Entwicklung der Oberflächendichte und der Radialgeschwindigkeit wird in Abbildung (4.6) dargestellt. Das in Abschnitt 3.3 vorgestellte Lösungsverfahren partieller DGL über selbstähnliche Lösungen kann damit gut veranschaulicht werden. Die Form der einzelnen Stoßfronten ändert sich nicht. Es ändert sich nur die Position beziehungsweise die Stoßfrontgeschwindigkeit  $v_s$  zu den entsprechenden Zeitschritten. Anschaulich wurde das Noh-Problem eindimensional mit einem einseitig verschlossenen Stempel vorgestellt. Wieder kann die 1 + eindimensionale Betrachtungsweise der Anschauung dienen.

Stellt man sich einen mit einem Fluid befüllten Zylinder vor, so wird überall an seiner Mantelfläche zur gleichen Zeit ein Druck Richtung Zentrum ausgeübt, wodurch das Fluid beschleunigt wird. Dies bildet dann über die Reflexion am Innenrand die Stoßfront in radialer Richtung nach außen hin aus. Die Ergebnisse des isothermen Noh-Problems (explizit gerechnet) sind in Abbildung (4.7) geplottet. Die exakte Lösung ist in Strichpunkten der numerischen aus `hedis` überlagert und liefert sehr gute Übereinstimmung für die Oberflächendichte, gleichermaßen wie für die Radialgeschwindigkeit. Einzig am

#### 4. Simulationen

Innenrand stimmt das Verhalten nicht mit der Erwartung überein. Wie bereits angemerkt muss das ein Effekt aufgrund der Randbedingungen sein, vor allem auch, weil er in beiden physikalischen Größen auftritt. Im Bereich des äußeren Randes hingegen wird das Verhalten sehr gut abgebildet. Durch den Gebrauch besserer RB (siehe Abschnitt

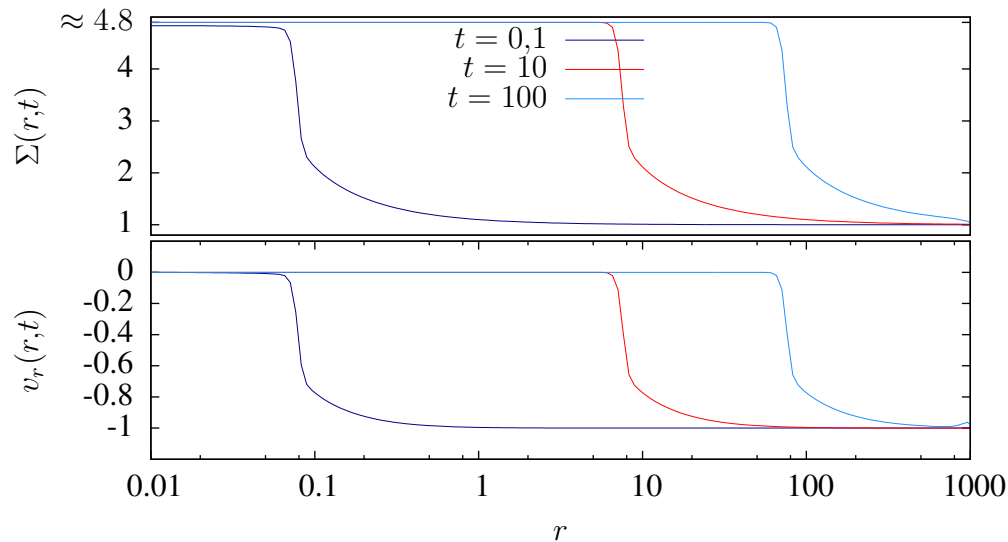


Abbildung 4.6.: Zeitlicher Verlauf der Oberflächendichte und der Radialgeschwindigkeit des isothermen Noh-Problems zur Anschauung aus den Daten mit konservativen Variablen erzeugt

3.5.3) konnte das Noh-Problem auch ohne die Verwendung von konservativen Variablen und den anderen gemachten Änderungen zum Laufen gebracht werden. Deshalb kann die Gegenüberstellung der Lösungen nach dem Umbau auf konservative Variablen vor allem auch als Indikator dafür dienen, dass dieser funktioniert. In Abbildung (4.8) wird dies deutlich, da die Ergebnisse sich nur marginal voneinander unterscheiden. Die Erklärung für die kleinen Abweichungen könnte durch die Transformation der dimensionslosen Koordinaten der exakten Lösung auf die in `hedis` benutzten liegen, da diese nur eine endliche Genauigkeit haben. Die Richtigkeit der Lösungen und die Funktionstüchtigkeit von `hedis` bezüglich der radialen Geschwindigkeitskomponente zusammen mit passenden RB kann aber trotzdem durchaus als überprüft angesehen werden.



4.1. Testergebnisse

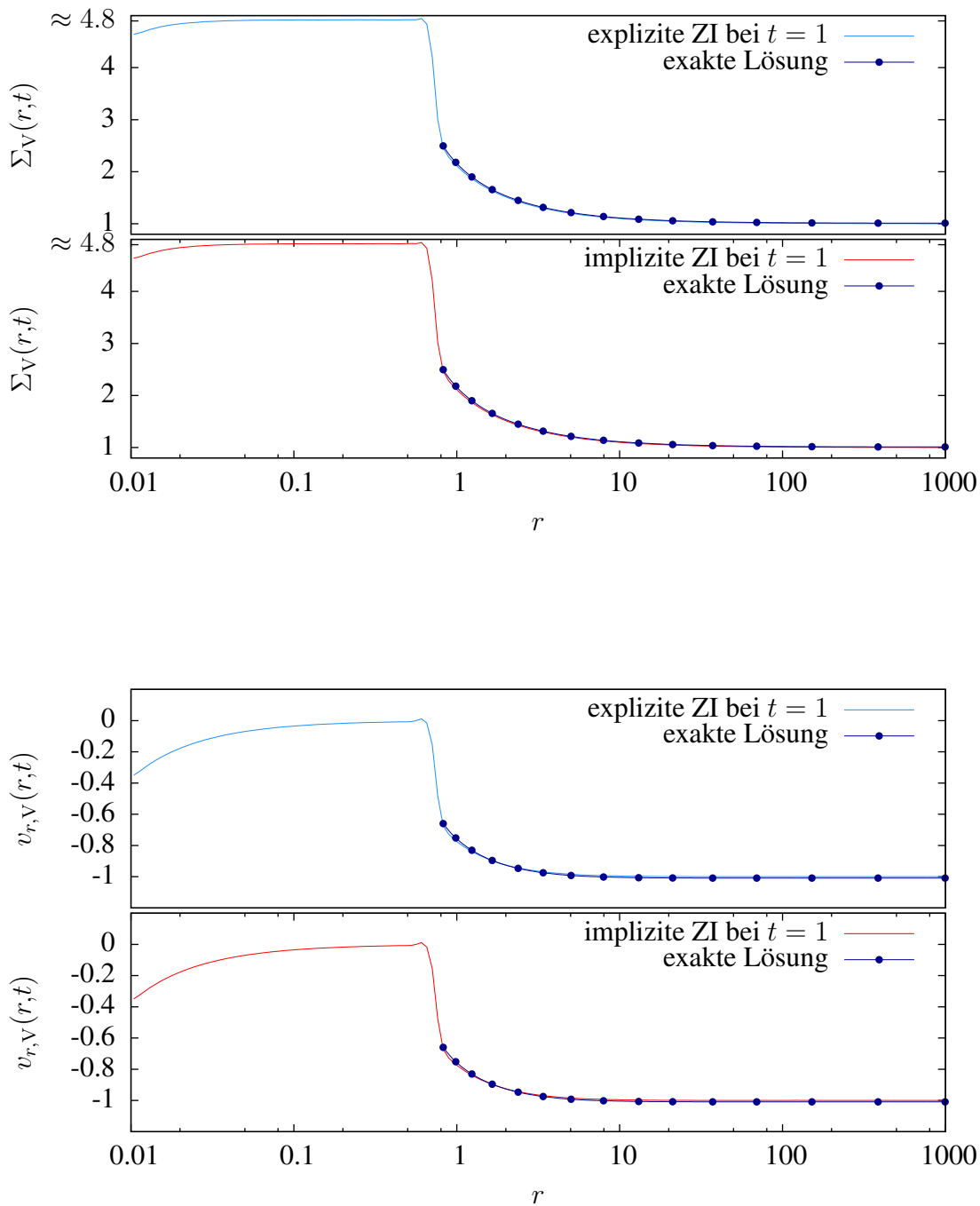


Abbildung 4.7.: Ergebnisse des Noh-Problems im Vergleich mit der exakten Lösung. Oben ist die Oberflächendichte, unten die Radialgeschwindigkeit vor dem Umbau gezeigt. (ZI steht für Zeitintegration)

#### 4. Simulationen

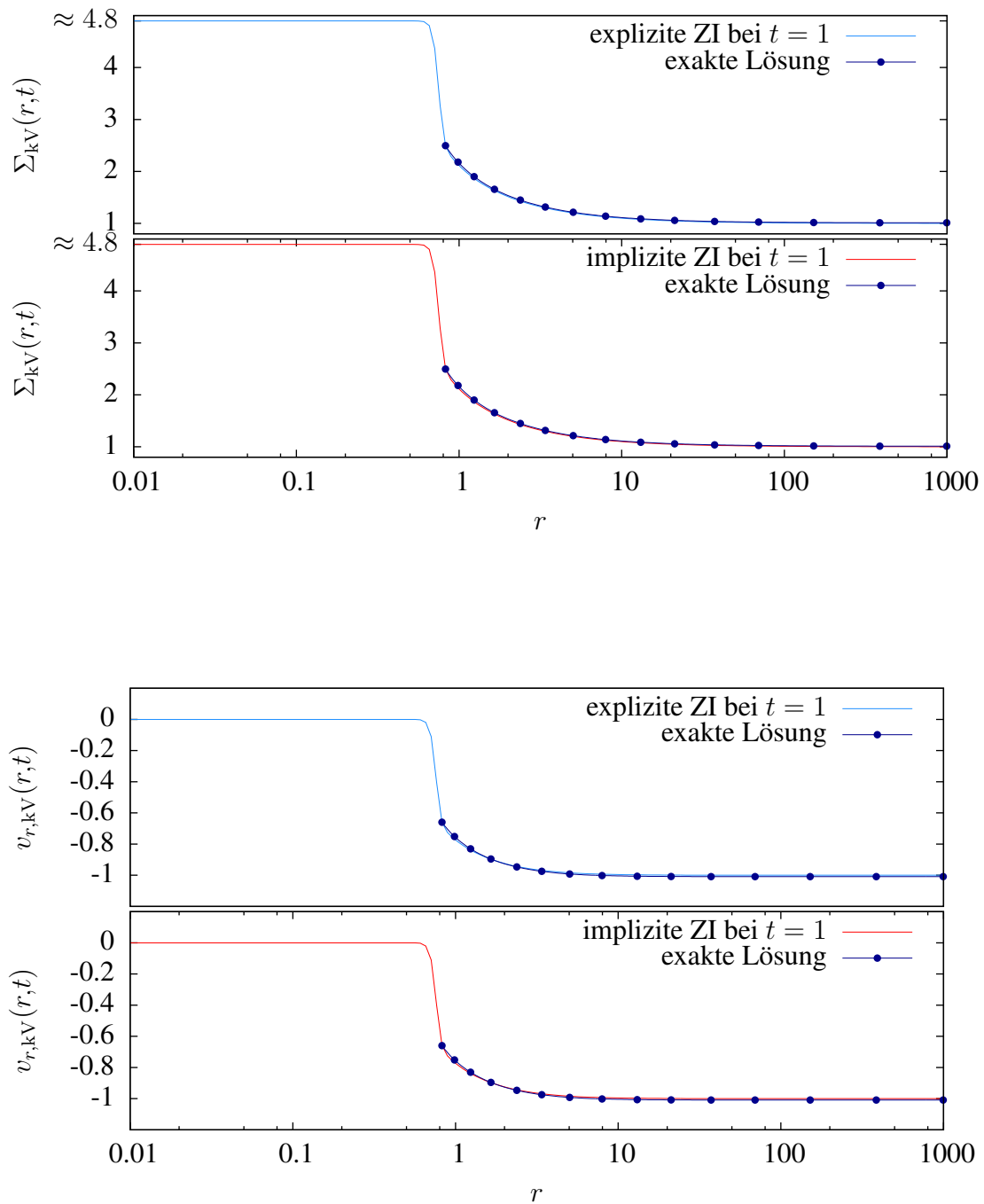


Abbildung 4.8.: Ergebnisse des Noh-Problems im Vergleich mit der exakten Lösung. Oben ist wieder die Oberflächendichte, unten die Radialgeschwindigkeit gezeigt. Diese Graphen können ebenfalls als Nachweis für die Tauglichkeit der Änderungen aus Abschnitt 3.5 betrachtet werden

#### 4.1.4. Pringle-Test

Als letzter Test wurde im vorigen Kapitel der Pringle-Test vorgeschlagen. Dieser basiert auf einer analytischen Lösung, ausgehend von der  $\delta$ -Distribution. Wie bereits in Abschnitt 3.4 erwähnt, muss deswegen der Startzeitpunkt für die Simulation verschoben werden, da die Numerik nicht mit einem Objekt der Breite Null zurechtkommt. Das Problem soll jetzt noch dimensionslos umgeschrieben werden. Dazu führt man die dimensionsbehafteten Größen aus Gl. (2.13)-Gl. (2.15) so zusammen, dass wenige Parameter das System ohne Dimension beschreiben können.

Da in `hedis` die Anfangsverteilung über die Masse vorgegeben wird und die Gravitationskonstante die einzig weitere Massenbehaftete Größe darstellt, kann die Masse zu

$$M_{\bullet} = \frac{1}{G}$$

umgeschrieben und auf 1 normiert werden. Weiterhin führt man die Mach-Zahl

$$\text{Ma} = \frac{v_{\varphi}}{c_s}$$

und die Reynolds-Zahl

$$\Re = \frac{v_{\varphi} r}{\nu^{(P)}} = \frac{r^2}{\nu^{(P)} \mathcal{T}}$$

ein, wobei  $\Omega^{-1} = \mathcal{T}$  hier eine dynamische Zeitskala definiert. Die Werte für diese dimensionslosen Größen, sowie der Startzeitpunkt und alle anderen Parameter sind in Tabelle 4.9 angegeben.

Parameter	Größe	Modus	Art
$r_{\min}$	$10^{-1}$	GZ ( $n$ )	zwei GZ
$r_{\max}$	1,6	Modus: Gravitation	Kepler-Gravitation
$N$	150	RB	Kepler RB
Ma	$10^4$	AB	Gl. (3.18), $v_r = 0$
$\Re$	$10^3$		$v_{\varphi} = \gamma \sqrt{\frac{GM}{r_0}}$
$M_Z$ (Zentralmasse)	$\frac{1}{G}$		
$c_s$	$\frac{1}{\text{Ma}}$		
$\mathcal{T}$	$2 \cdot 10^{-3}$		

Abbildung 4.9.: Anfangsparameter und Einstellungen für den Pringle-Test

#### 4. Simulationen

Die Werte für die Mach-Zahl und die Reynolds-Zahl resultieren aus einer Abschätzung für die Viskosität, denn es muss

$$\nu^{(P)} \stackrel{r=r_0}{=} \frac{\Re}{\text{Ma}} < 1$$

gelten. Es lässt sich sehr schön erkennen, dass die Ausgangsverteilung perfekt mit der analytischen Lösung übereinstimmt. Im zeitlichen Verlauf, siehe Abbildung (4.10), sind schnell Abweichungen zu erkennen. Zwar stimmen die Maxima mit der Lösung überein, aber die Kurven sind zu wenig Richtung Zentrum verschoben. Im expliziten Verfahren kann das durchaus noch an falsch gewählten Parametern (wahrscheinlich an der Viskosität) liegen. Da sich die analytische Lösung auf das Pringle-Modell und nicht auf das erweiterte bezieht, könnte dies mitunter auch eine Ursache der Abweichungen sein. Das Verfahren an sich sollte jedoch korrekt sein. Damit ist wieder gezeigt, dass die Umbauten richtig implementiert sein müssen.

Leider konnten keine Ergebnisse für das implizite Verfahren gewonnen werden. Da die Prinzipiellen Umbauten stimmen müssen, was nicht nur der Pringle-Test zeigt, muss der Fehler innerhalb der Routinen für die implizite Zeitintegration liegen. Da das Verfahren sehr anfällig ist, vermutet man unter anderem auch Ungenauigkeiten in der Umrechnungsroutine zwischen primitiven und konservativen Variablen.

## 4.2. Das Wachstum eines supermassereichen Schwarzen Loches

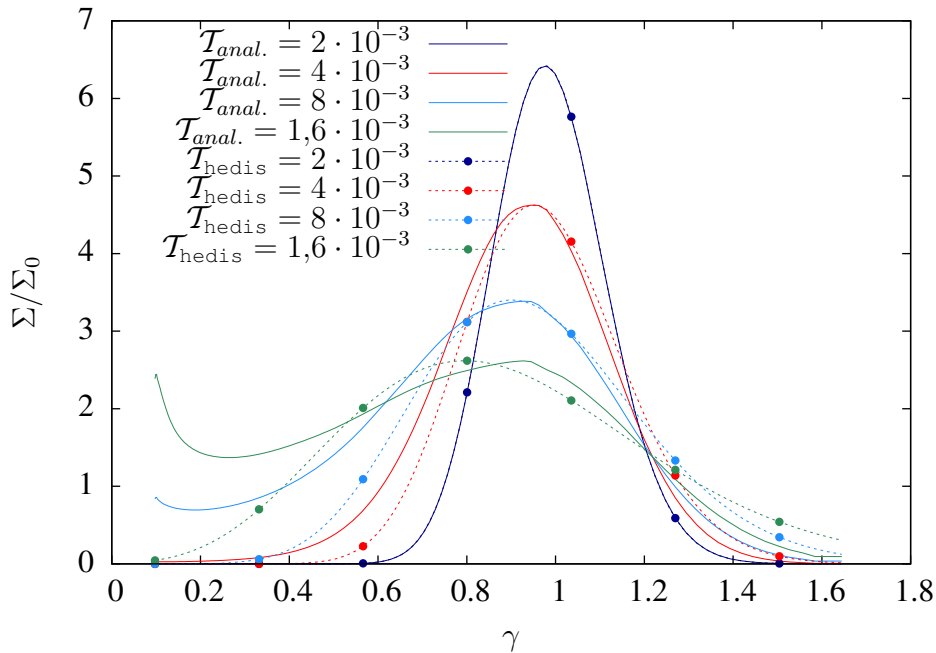


Abbildung 4.10.: Vergleich der analytischen Lösung nach Pringle (1981) mit der Lösung aus hedis (explizites Verfahren)

## 4.2. Das Wachstum eines supermassereichen Schwarzen Loches

Zur Beantwortung der Themenfrage betrachtet man die Entwicklung eines Schwarzen Loches innerhalb der Welt-Zeit, die nach Jarosik et al. (2011) zu  $\tau_{\text{Welt}} \approx (13,75 \pm 0,11) \cdot 10^9$  a bestimmt wurde. Des Weiteren werden verschiedene Parameter variiert, nämlich die Viskosität  $\beta$  und der initiale Außenradius  $r_{\text{max},i}$  der AS. Die Viskosität ist der Schlüsselparameter für den Massentransport (siehe Abschnitt 2.3 und 2.4). Über den Außenradius und die Anfangsscheibenmasse  $M_{D,i}$  wird in hedis die Oberflächendichte bestimmt. Mit anderen Worten, die Beziehung  $M = \rho \cdot V$  genau dann voll bestimmt ist, wenn zwei der drei Parameter vorgegeben werden. Da man sich im Eindimensionalen befindet, reduziert sich das Volumen in hedis quasi auf den Radius<sup>2</sup>  $r$ . Weiter-

<sup>2</sup>Das Volumen für die Massenberechnung wird über einen Kreisring (Gl. (2.22)) berechnet, da man sich in einen 1 + eindimensionalen Raum befindet (siehe Abschnitt 2.1.1)

#### 4. Simulationen

hin ist der Innenradius fest<sup>3</sup> und somit wird über den Außenradius und die Masse die Dichteverteilung innerhalb der AS eingestellt. Es ist klar, dass das Akkretionsverhalten dadurch stark beeinflusst wird. Der Bereich, indem die initiale Scheibenmasse variiert wird, lässt sich über Schmidt (1971) rechtfertigen. Dort werden Quasarmassen mit bis zu circa  $10^{13}M_{\odot}$  angegeben. Für die Simulation sind die Einstellungen und Wertebereiche aus Tabelle 4.11 verwendet worden.

Parameter	Größe	Modus	Art
$r_{\min}$	$10^{-3}$	GZ ( $n$ )	eine GZ
$r_{\max,i}$	0,1...1 kpc	Modus: Gravitation	monopol Näherung
$N$	100	Modus: Modell	Pringle RB
$M_{\bullet}$	$10^4 M_{\odot}$	AB $\Sigma(r)$	$\Sigma_0 \sqrt{1 - \frac{r-r_{\min}}{r_{\max,i}-r_{\min}}}$
$M_{D,i}$	$(10^8 \dots 10^{13}) M_{\odot}$	(Kalnajs-Scheibe)	$v_{\varphi} = \sqrt{-rg}$
$\beta$	$10^{-3} \dots 10^{-2}$		$v_r = 0$
$c_s$	$9,28 \cdot 10^{-7} \frac{\text{pc}}{\text{a}} (\approx 100K)$		
$t_{\text{end}}$	$13,75 \cdot 10^9 \text{ a}$		

Abbildung 4.11.: Simulationsparameter und AB

In Abbildung (4.12) und Abbildung (4.13) sind die Ergebnisse dieser Simulation  $M_{\bullet}$  ( $M_{D,i}$ ) zusammengefasst dargestellt. Jeder Graph enthält zehn Kurven, mit unterschiedlicher  $\beta$ -Viskosität zwischen  $10^{-2} \dots 10^{-3}$ . Die Graphen a – e unterscheiden sich im Außenradius. Es fallen sofort die Maxima in Abbildung (4.12) /a,b,c,d auf, während in Abbildung (4.12)/e und in Abbildung (4.13) keine mehr zu erkennen sind. Zwar sieht es so aus, als ob es bei größeren Anfangsscheibenmassen ( $M_{D,i} > 1 \cdot 10^{13} M_{\odot}$ ) weitere Maxima geben könnte, allerdings sind deren Massenbereiche nicht mehr über Schmidt (1971) gedeckt. Die Oberflächendichten sind wegen der kleinen Außenradien ( $r_{\max,i} = 100 \dots 400 \text{ pc}$ ) relativ hoch, weswegen vor allem hier die Maxima auftreten. Dies verwundert insofern nicht weiter, da mit Gl. (2.35) bei hohen Oberflächendichten hohe Viskosität auftritt, die wiederum große Akkretionsraten bewirkt. Ebenso beeinflusst die  $\beta$ -Parametrisierung das Wachstum und verschiebt die Lage der Maxima. Für  $r_{\max,i} > 400$  lassen sich keine Maxima für den hier verwendeten Parameterbereich mehr finden, weshalb nur noch die Massen innerhalb obiger Grenzen betrachtet werden

<sup>3</sup>Nach Blank (2010) hat die Lage des Innenrandes kaum Einfluss auf das Wachstum des SL und kann somit fest vorgegeben werden

## 4.2. Das Wachstum eines supermassereichen Schwarzen Loches

sollen. In Abbildung (4.14) sind nur die größten Maxima innerhalb dieser Grenzen aufgetragen. Damit lässt sich folgende Aussage formulieren:

**Innerhalb des verwendeten Parameterraums kann die Masse eines SL ( $M_{\bullet}$ ) einen bestimmten Wert nicht überschreiten. Dieser liegt nach  $13,75 \cdot 10^9$  a bei**

$$\max_{r_{\max,i}=0,1\dots 0,4\text{kpc}, \beta=10^{-3}\dots 10^{-2}} (M_{\bullet}(M_{D,i})) \leq 1,411 \cdot 10^{11} M_{\odot}. \quad (4.2)$$

Weiterhin können die Massenflüsse<sup>4</sup> herangezogen werden (siehe Abbildung (4.16)). Der Massenfluss in das SL ( $\dot{M}_{\bullet}$ ) und die Eddington-Akkretionsrate ( $\dot{M}_{\text{Edd}}$ ) verhalten sich bis etwa zur Salpeter-Zeitskala Gl. (2.47) ( $t \approx 1,5\tau_{\text{S}}$ ) exakt gleich. Das heißt, dass sehr viel Masse aus dem System verloren gehen muss, weil der Massenfluss aus der Scheibe ( $\dot{M}_{\text{D}}$ ) sehr viel größer als der in das SL ist. Dieser Zeitraum des Akkretionsprozesses bezeichnet man als **Eddington-Limitiert**, da das SL also nicht mehr Masse aufnehmen kann, als das Eddington-Limit erlaubt. Erst nach der Salpeter-Zeit kann das SL die komplette Masse, welche die Scheibe liefert, aufnehmen.

Betrachtet man direkt die einzelnen Massen (siehe Abbildung (4.17)), fällt ebenfalls ein Schnittpunkt der Kurven auf. Ab diesem Zeitpunkt ändert sich das Gravitationsverhalten<sup>5</sup> von selbstgravitierend zu nicht mehr selbstgravitierend. Allerdings ist dies nicht wie der Schnittpunkt impliziert eine harte Grenze, vielmehr verändert sich der Gravitationscharakter kontinuierlich. Weiterhin erkennt man, dass die Schwarzwlochmasse gegen einen Grenzwert, also gegen ihr Maximum (siehe Abbildung (4.14)) strebt. In Tabelle 4.15 wurden die viskosen Zeitskalen über Gl. (2.40) (mit  $r_{\max,i}$ ) ausgerechnet. Allgemein gilt, dass die Viskosität auftretende Störungen, überlagerte Schwingungen oder Fragmentierungen dämpft, beziehungsweise auflöst. Deshalb sind einige viskose Zeitskalen erforderlich, bis sich eine Akkretionsscheibe entwickelt hat. Auch dies konnte mit den berechneten Daten aus Tabelle 4.15 bestätigt werden.

Desweiteren ist in Abbildung (4.18) der Massenfluss der aus dem System entweichenden Materie ( $\dot{M}_{\text{verlust}} = \dot{M}_{D,i} - \dot{M}_{\bullet}$ ), also der Verlust-Massenfluss, gezeigt. Zunächst fällt dieser mit zunehmender Schwarzwlochmasse. Ab einem gewissen Zeitpunkt bricht

<sup>4</sup>Die Zeitachse in Abbildung (4.16) und Abbildung (4.17) zeigt nicht die ganze Weltzeit, da die Vergleichbarkeit der Ergebnisse mit Duschl & Strittmatter (2011) gewährleistet bleiben soll.

<sup>5</sup>Es wurde mit der Monopolnäherung (Tabelle 4.11) gerechnet. Diese stellt keine volle Selbstgravitation dar, weil die Lösungen nur genähert und nicht exakt berechnet werden (siehe 2.2). Trotzdem kann von einem selbstgravitativen Verhalten gesprochen werden.

#### 4. Simulationen

dieser Fluss ein, das heißt, dass ab diesem Zeitpunkt keine Masse mehr verloren geht. Im Vergleich deckt sich dieser Zeitpunkt mit der ersten Änderung der Akkretionsrate des SL  $\dot{M}_\bullet$ . Wie bereits erwähnt, sollte die Verlustmasse, sobald die Akkretion am Eddington-Limit verlassen wird, verschwinden. Dieses Verhalten kann bestätigt werden, wobei die Zeiten zwar verglichen werden können, aber nicht korrekt übereinstimmen. Die Ursache dieser Differenz liegt wahrscheinlich an der Genauigkeit, also an der Auflösung, mit der die Rechnungen durchgeführt wurden. Hier wurde  $N = 100$  gewählt. Mit höherer Auflösung könnten somit eventuell die korrekten Zeiten reproduziert werden. Leider war es nicht möglich in weiteren Testläufen eine höhere Auflösung zu verwenden, ohne dass das Programm frühzeitig abgebrochen wäre.



## 4.2. Das Wachstum eines supermassereichen Schwarzen Loches

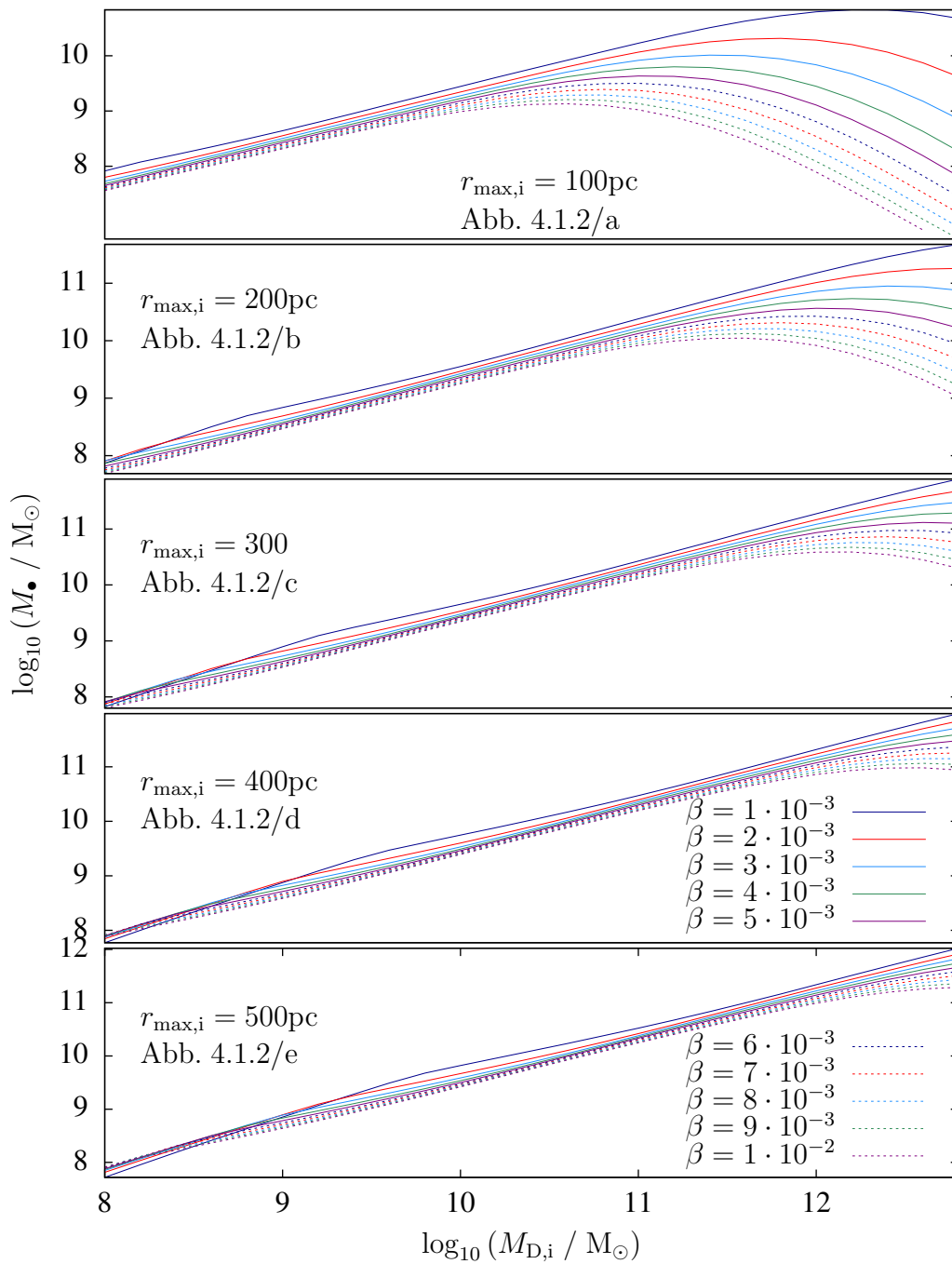


Abbildung 4.12.: Verhalten der Schwarzwlochmasse nach  $M_{\bullet}$  nach  $13,75 \cdot 10^9\text{a}$ . Die einzelnen Bilder zeigen den initialen Außenradius der AS  $r_{\max,i} = 0,1 \dots 0,5\text{kpc}$ . Die Farbcodierung bezieht sich auf unterschiedliche Werte für  $\beta$ .

#### 4. Simulationen

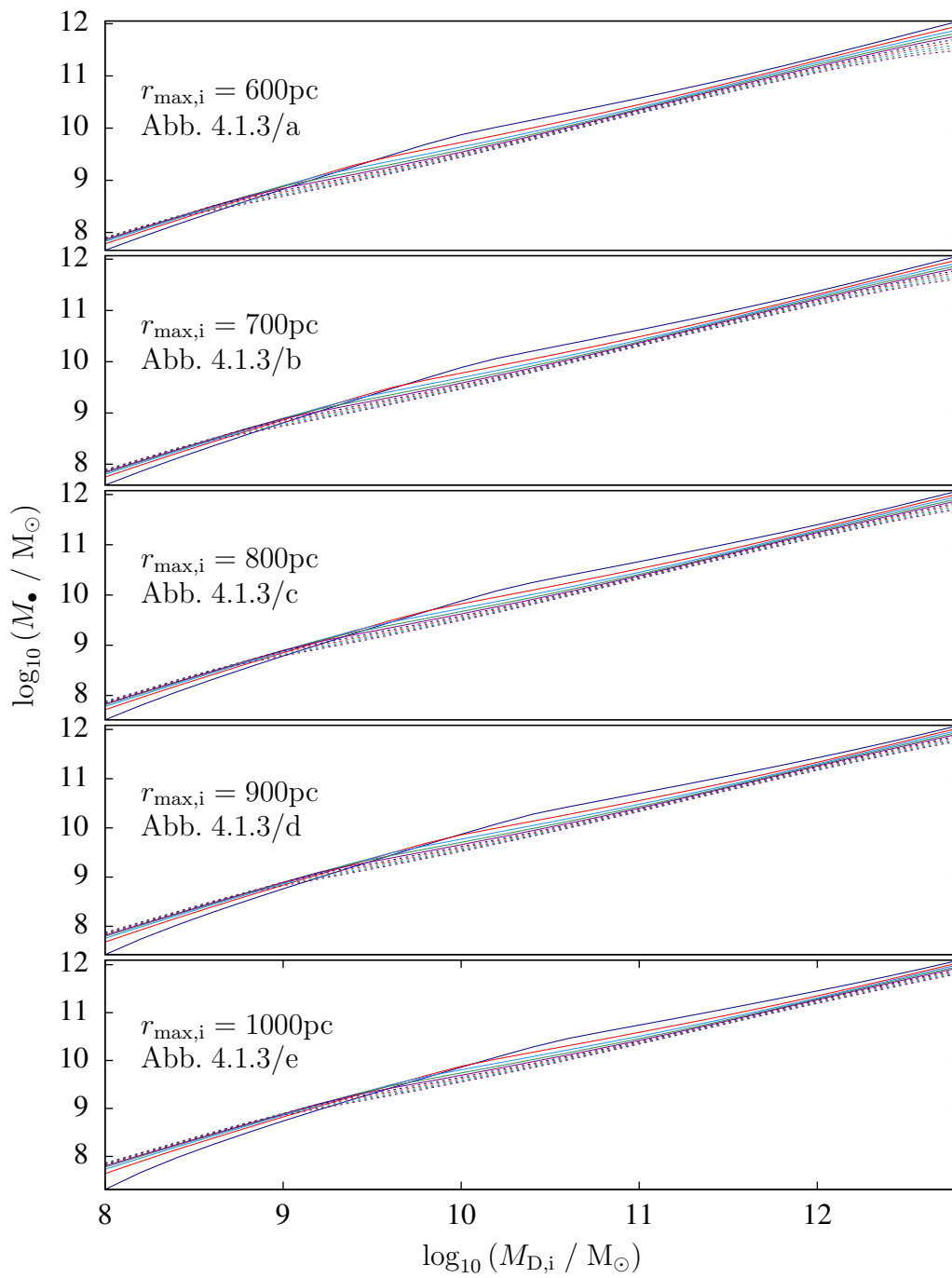


Abbildung 4.13.: Fortsetzung obiger Simulationsergebnisse. Der initiale Außenradius liegt hier zwischen  $r_{\max,i} = 0,6 \dots 1\text{kpc}$ , für  $\beta$  gilt die selbe Farbcodierung.

## 4.2. Das Wachstum eines supermassereichen Schwarzen Loches

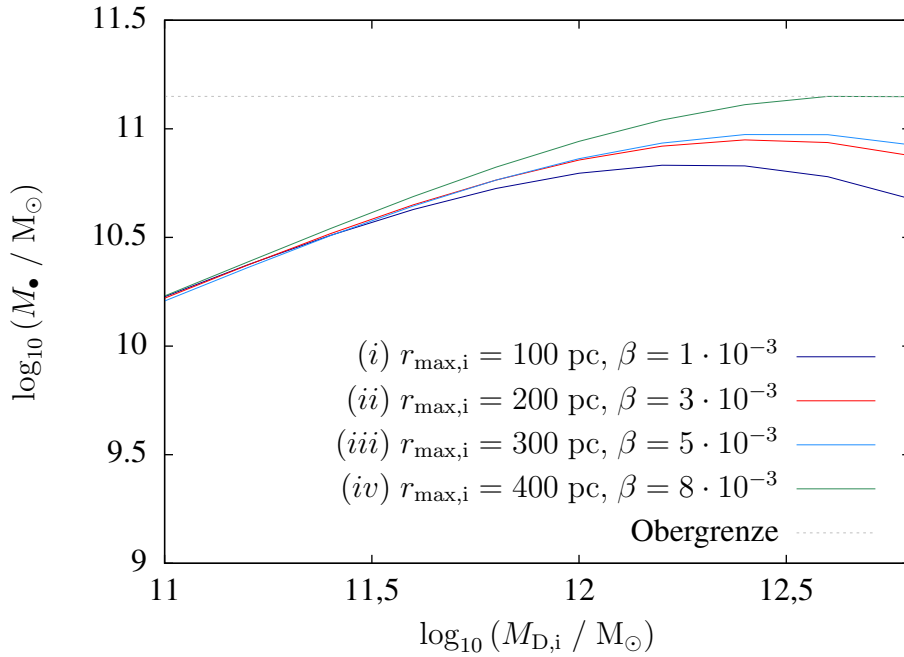


Abbildung 4.14.: Ausschnitt aus Abbildung (4.12)/a – d im Bereich der Maxima. Gezeigt sind die größten Maxima der Radien  $r_{\max,i}$ , mit  $M_{\bullet} \stackrel{(i)}{=} 6,8 \cdot 10^{10} M_{\odot}$ ,  $M_{\bullet} \stackrel{(ii)}{=} 8,89 \cdot 10^{10} M_{\odot}$ ,  $M_{\bullet} \stackrel{(iii)}{=} 1,31 \cdot 10^{11} M_{\odot}$ ,  $M_{\bullet} \stackrel{(iv)}{=} 1,41 \cdot 10^{11} M_{\odot}$ . Weiterhin hat man somit eine Obergrenze gefunden, die im verwendeten Parameterbereich nicht überschritten wird.

	$\tau_{\beta}$ (a)	$t$ (a) Abb. 4.17	Anteil $\tau_{\beta}$	$r_{\max,i}$ (pc)	$M_{D,i}$ ( $M_{\odot}$ )	$v_{\varphi,K}$ ( $\frac{\text{pc}}{\text{a}}$ )	$\beta$
(a)	$1,18 \cdot 10^7$	$8,3 \cdot 10^8$	$\approx 70$	100	$1,58 \cdot 10^{12}$	$8,44 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-3}$
(b)	$8,87 \cdot 10^7$	$8,4 \cdot 10^8$	$\approx 95$	200	$2,51 \cdot 10^{12}$	$7,52 \cdot 10^{-3}$	$3 \cdot 10^{-3}$
(c)	$7,77 \cdot 10^7$	$8,5 \cdot 10^8$	$\approx 110$	300	$3,98 \cdot 10^{12}$	$7,73 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-3}$
(d)	$7,47 \cdot 10^7$	$8,8 \cdot 10^8$	$\approx 118$	400	$3,98 \cdot 10^{12}$	$6,69 \cdot 10^{-3}$	$8 \cdot 10^{-3}$

Abbildung 4.15.: Kenngrößen aus den Simulationsergebnissen und Umrechnung der Zeiten in viskose Zeitskalen nach Gl. (2.40)

#### 4. Simulationen

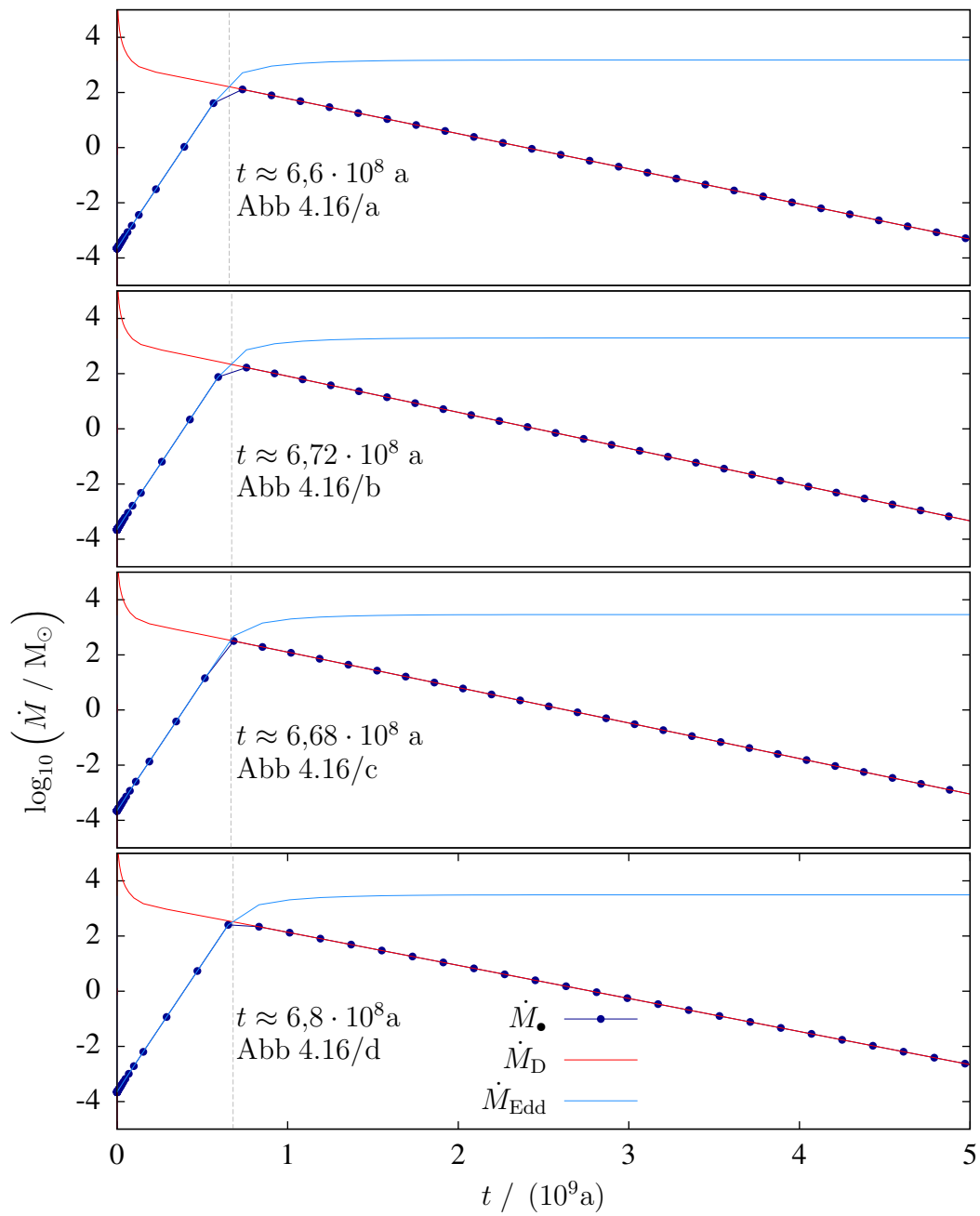


Abbildung 4.16.: Massenflüsse in Abhängigkeit der Zeit. Die Nomenklatur (a)-(d) entspricht der aus Tabelle 4.15, die graue Linie gibt die Salpeter-Zeitskala an, also ab welchem Zeitpunkt keine Masse mehr verloren geht, sondern direkt in SL fällt.

## 4.2. Das Wachstum eines supermassereichen Schwarzen Loches

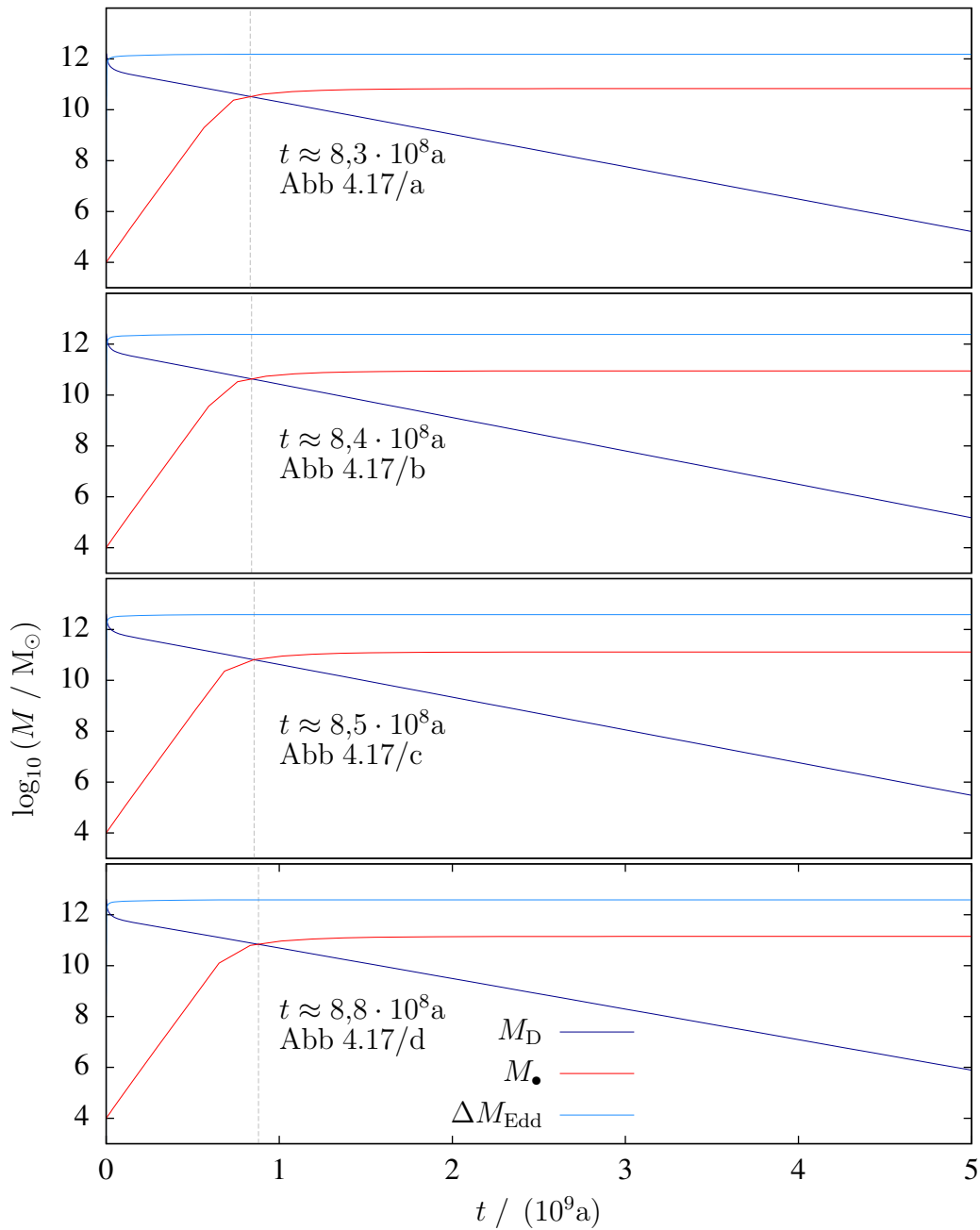


Abbildung 4.17.: Massenentwicklung in Abhängigkeit der Zeit. Auch hier stimmt die Nomenklatur wieder mit Tabelle 4.15 überein. Die graue Linie markiert die Zeit, nach der sich das Gravitationsverhalten ändert (siehe Tabelle 2.2).

#### 4. Simulationen

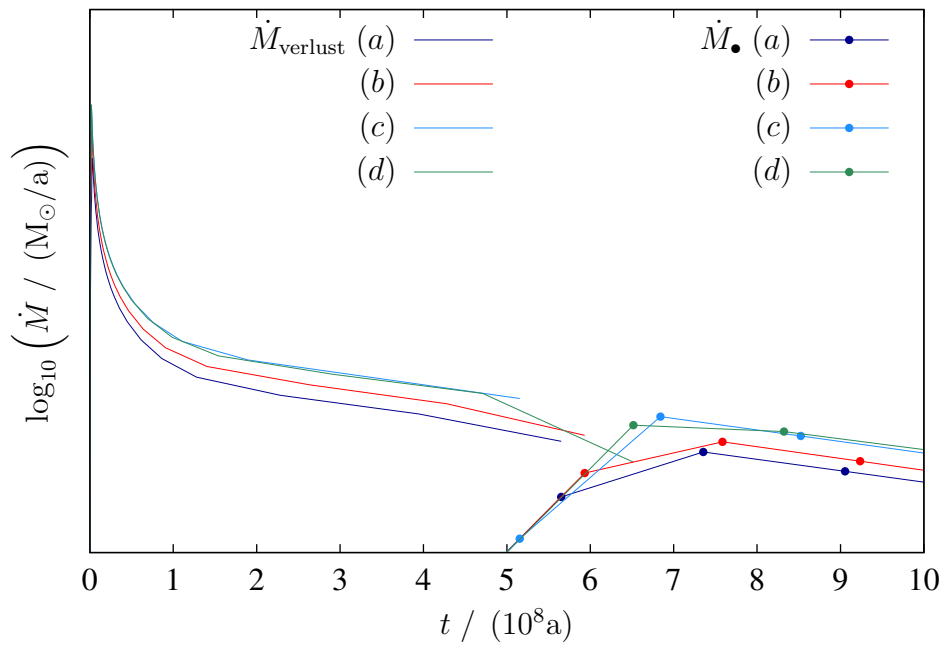


Abbildung 4.18.: Verschwindender Verlust-Massenfluss und die Akkretionsrate zum SL. Die Nomenklatur ist wieder bezüglich Tabelle 4.15 angegeben.

## 5. Résumé

Hier soll zunächst noch einmal Bezug auf die gemachten Schritte in dieser Arbeit genommen werden. Nach dieser Zusammenfassung wird auf die gesammelten Ergebnisse eingegangen und diskutiert, was bisher erreicht oder noch nicht erreicht wurde. Zuletzt wird ein Ausblick auf Fragen gegeben, die durch diese Arbeit aufgeworfen wurden.

### 5.1. Test-Probleme

Es konnten über verschiedene Testverfahren, also durch

- das hydrostatische Problem,
- den isothermen Vortex,
- das Noh-Problem und
- den Pringle-Test

Unzulänglichkeiten von `hedis` in Form numerischer Stabilität bezüglich des erweiterten Modells (Abschnitt 2.1.1) aufgezeigt werden. Da diese Mängel ausschlaggebend für die Güte des Codes sowie seine Stabilität hinsichtlich unterschiedlicher Parameter (vor allem bei der Viskosität) sind, ist es sehr wichtig, diese zu beseitigen. In Abschnitt 3.5 konnte dies über

- die Umstellung auf konservative Variablen (Einführen einer Umrechnungsroutine),
- das Erweitern auf eine zweite Geisterzelle (GZ),
- das Anpassen der Rekonstruktion,

## 5. Résumé

- das Anpassen der RB und
- die Umstellung der impliziten Zeitschrittberechnung

zum Teil bewerkstelligt werden. Die neu implementierten Limiter-Funktionen haben das gewünschte Verhalten aufgezeigt, wobei der `minmod`-Limiter, als diffusivster Limiter die besten Ergebnisse lieferte. Stellt man die Resultate aus den Tests in Abschnitt 4.1 den exakten Lösungen und den Lösungen des alten Verfahrens gegenüber, so ist deren Genauigkeit erheblich verbessert. Ebenso sind sie numerisch stabil, das heißt, die Berechnungen brechen nicht mehr nach nur einigen Zeitschritten unerwartet ab.

Jedoch gibt es eine Ausnahme, nämlich den Pringle-Test. Die expliziten Ergebnisse weisen zwar das richtige Verhalten bezüglich der analytischen Lösung auf, können diese aber im zeitlichen Verlauf nicht mehr korrekt reproduzieren. Es bleibt die Frage, ob die Güte von `hedis` dafür verantwortlich ist, oder ob sich das erweiterte Modell nicht besser auf die Pringle-Lösung reduzieren lässt. Ein Vergleich mit `fosite` könnte diese Frage ausräumen. Das implizite Zeitintegrationsverfahren für den Pringle-Test konnte nicht angewandt werden. Um den Fehler hier einzuschränken, kann man aber argumentieren, dass die verwendeten Routinen, auf die auch das explizite Verfahren zugreift, funktionieren müssen. Der Abbruch des Verfahrens muss also innerhalb der impliziten Berechnungsroutinen passieren. Es zeigte sich bei den Umbaumaßnahmen, dass die Henyey-Matrix (Kippenhahn & Weigert, 1990) relativ anfällig ist. Diese Matrix ist eine dünnbesetzte  $N \times N$ -Matrix<sup>1</sup> in Streifenform mit einer unbedingt nicht verschwindenden Determinante  $\det H \neq 0$ . Wird die Determinante jedoch Null, was einigermaßen häufig geschehen ist, wird die Henyey-Matrix singulär, und das Verfahren bricht ab. Diese Art Abbrüche erkennt `hedis` und reagiert mit einer entsprechenden Fehlermeldung. Das ist beim Pringle-Test jedoch **nicht** der Fall.

Weiterhin hat sich gezeigt, dass die Azimutalgeschwindigkeit negativ wird. Die Ursache dafür liegt in der impliziten Zeitintegration. Dabei muss das lineare Gleichungssystem<sup>2</sup>  $\tilde{A}_k(\tilde{u}_{1..3N}) = 0$ , mit  $\tilde{A}$  als Gl. (2.16) definiert, gelöst werden. Überlagert man dieser Gleichung kleine Korrekturen  $\delta\tilde{A}_k$ , kann ein Gleichungssystem

$$\delta\tilde{u} = -H^{-1}\tilde{A}$$

---

<sup>1</sup>N steht für die Anzahl der Gitterpunkte. Da `hedis` eindimensional rechnet, hat die Henyey-Matrix  $(1 \cdot N^2)$  Einträge

<sup>2</sup>eine Ausführliche Ableitung muss in Blank (2010) nachgelesen werden.



aufgestellt werden, dessen Lösungen Korrekturen zu der Lösungsfunktion

$$\tilde{u}_k^2 = \tilde{u}_k^1 + \delta\tilde{u}_k$$

darstellen. Diese Korrekturen  $\delta\tilde{u}_k$  haben (primär für  $k = 3$ ) die Eigenschaft, für zu kleine Zeitschritte negativ aber betragsmäßig größer als die eigentliche Lösungen  $\tilde{u}_k^1$ , also

$$|-\delta\tilde{u}_k| > |\tilde{u}_k^1|$$

zu werden. Dieses darf keinesfalls für die Komponenten  $k = 1,2$  passieren, da man keine negativen Dichten und ebenfalls keine spontane Drehrichtungsänderung erzeugen darf. Die implizite Zeitschrittberechnung nach Abschnitt 3.5.5 schafft hier nur insofern Abhilfe, dass bei genügend großen, aber keinesfalls zu kleinen Zeitschritten das Verfahren funktioniert. Das Problem hierbei liegt darin, dass die Berechnungszeit stark ansteigt und sich das implizite Verfahren somit kaum mehr lohnt.

Abhilfe könnte eine **automatische Schrittweitenkontrolle** nach Hairer et al. (1993) schaffen. Diese verwendet den lokalen Fehler bei der Iteration der Lösungen innerhalb eines Zeitschrittes. Wird der Fehler zu groß, verringert sich die Schrittweite, wird er klein, vergrößert sie sich. Ein dadurch gesteuertes Verfahren könnte die beschriebenen Probleme beheben.

Trotz aller Umbaumaßnahmen und Testverfahren ist es **nicht** gelungen die Simulationen aus Abschnitt 4.2 mit dem erweiterten Modell durchzuführen. Dies käme aber vor allem der Aussagekraft der dort verwendeten Ergebnisse zunutze.

## 5.2. Ausblick

In Abschnitt 4.2 konnte eine Massengrenze hinsichtlich der initialen Scheibenmasse gefunden werden. Diese ist aber auf den angegebenen Parameterraum ausgelegt. Würde man diesen für  $M_{D,i}$  erweitern, würden sich wahrscheinlich weitere, noch höhere Maxima finden lassen, wobei keine Beobachtungsdaten gefunden wurden, die deren Existenz stützen könnten. Weiterhin wäre es interessant herauszufinden, welche Massen nach  $12,5 \cdot 10^9$  a, also zu der Zeit als die ersten Quasare entstanden sind, erreicht werden können.

## 5. Résumé

Der Pringle-Test muss mit `fosite` verglichen werden, um auszuschließen, ob entweder das erweiterte Modell die analytische Lösung nicht besser wiedergeben, oder ob eine höhere Genauigkeit erreicht werden kann. Weiterhin sollte dieser Test für das implizite Zeitintegrationsverfahren realisiert werden. Dies erfordert wahrscheinlich die Implementierung einer automatischen Schrittweitenkontrolle, mit der es möglich wird, Simulationen auch innerhalb akzeptabler Rechenzeiten durchzuführen. Damit würde auch der sehr wichtige Vergleich zwischen den beiden Modellen durchführbar. Wie bereits angemerkt, ist das Pringle-Modell mit den vielen Annahmen nicht so aussagekräftig wie das erweiterte Modell. Dass die beiden in `hedis` möglichen Verfahren ähnliche Ergebnisse produzieren, wurde zwar in Blank (2010) gezeigt, muss aber nach dem Umbau unbedingt reproduziert werden können. Damit könnten auch die Ergebnisse aus 4.2 neu erzeugt und verglichen werden, weil die Umbaumaßnahmen unter anderem mit der Einführung der zweiten Geisterzelle auch das Pringle-Modell verbessern müssten.

# Literaturverzeichnis

- Barth, A. J., Martini, P., Nelson, C. H., & Ho, L. C. (2003). Iron Emission in the  $z = 6.4$  Quasar SDSS J114816.64+525150.3. *Astrophysical Journal, Letters*, 594, L95–L98.
- Binney, J. & Tremaine, S. (1987). *Galactic dynamics*. Princeton, NJ, Princeton University Press, 1987, 747 p.
- Blank, M. (2010). Das Wachstum Schwarzer Löcher in aktiven galaktischen Kernen. Master's thesis, Christian-Albrechts-Universität zu Kiel.
- Cattaneo, A., Combes, F., Colombi, S., Bertin, E., & Melchior, A.-L. (2005). Spectral and morphological properties of quasar hosts in smoothed particle hydrodynamics simulations of active galactic nucleus feeding by mergers. *Monthly Notices of the RAS*, 359, 1237–1249.
- Courant, R., Friedrichs, K., & Lewy, H. (1928). Über die partiellen Differenzengleichungen der mathematischen Physik. *Mathematische Annalen*, 100, 32–74.
- Duschl, W. J. & Strittmatter, P. A. (2011). The cosmogony of supermassive black holes. *Monthly Notices of the RAS*, 413, 1495–1504.
- Duschl, W. J., Strittmatter, P. A., & Biermann, P. L. (2000). A note on hydrodynamic viscosity and selfgravitation in accretion disks. *Astronomy and Astrophysics*, 357, 1123–1132.
- Eddington, A. S. (1921). Das Strahlungsgleichgewicht der Sterne. *Zeitschrift für Physik*, 7, 351–397.
- Eddington, Arthur Stanley, S. (1927). *Stars and Atoms*. Oxford at the Clarendon Press.

## Literaturverzeichnis

- Eggen, O. J., Lynden-Bell, D., & Sandage, A. R. (1962). Evidence from the motions of old stars that the Galaxy collapsed. *Astrophysical Journal*, 136, 748.
- Faires, J. D. & Burden, R. L. (2000). *Numerische Methoden Näherungsverfahren und ihre praktische Anwendung*. Spektrum Lehrbuch. Heidelberg: Spektrum, Akad. Verl.
- Frank, J., King, A., & Raine, D. (2002). *Accretion Power in Astrophysics*. Cambridge Astrophysics Series.
- Giles, M. (1988). Non-reflecting Boundary Conditions for the Euler Equations. *Forschungsbericht*.
- Gillessen, S., Eisenhauer, F., Trippe, S., Alexander, T., Genzel, R., Martins, F., & Ott, T. (2009). Monitoring stellar orbits around the massive black hole in the galactic center. *The Astrophysical Journal*, 692(2), 1075.
- Godunov, S. (1959). A difference method for numerical calculation of discontinuous solutions of the equations of hydrodynamics. *Mat. Sb. (N.S.)*, 47(89), 271–306.
- Hairer, E., Nørsett, S., & Wanner, G. (1993). *Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problems*. Solving Ordinary Differential Equations. Springer.
- Hartmann, L. (1998). *Accretion Processes in Star Formation*. Cambridge Astrophysics Series.
- Hasinger, G., Miyaji, T., & Schmidt, M. (2005). Luminosity-dependent evolution of soft x-ray selected AGN: New Chandra and XMM-Newton surveys. *Astron.Astrophys.*, 441, 417–434.
- Illenseer, T. (2006). *Hochauflösende Verfahren zur numerischen Berechnung von strahlungsgetriebenen Scheibenwinden*. dissertation, Universität Heidelberg.
- Jarosik, N., Bennett, C. L., Dunkley, J., Gold, B., Greason, M. R., Halpern, M., Hill, R. S., Hinshaw, G., Kogut, A., Komatsu, E., Larson, D., Limon, M., Meyer, S. S., Nolta, M. R., Odegard, N., Page, L., Smith, K. M., Spergel, D., Tucker, G. S., Weiland, J. L., Wollack, E., & Wright, E. L. (2011). Seven-year wilkinson microwave anisotropy probe (wmap) observations: Sky maps, systematic errors, and basic results. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 192(2), 14.

- Kato, S., Fukue, J., & Mineshige, S. (2008). *Black-Hole Accretion Disks: Towards a New Paradigm*. Kyoto University Press.
- Kippenhahn, R. & Weigert, A. (1990). *Stellar structure and evolution*. Astronomy and astrophysics library. Berlin: Springer.
- Kurganov, A. & Tadmor, E. (2000). New high-resolution central schemes for nonlinear conservation laws and convection-diffusion equations. *J. Comput. Phys*, 160, 241–282.
- Landau, L. D. & Lifšic, E. M. (1974). *Lehrbuch der theoretischen Physik*, volume 6: Hydrodynamik. Berlin: Akademie-Verl., 5., überarb. Aufl. edition. Aus d. Russ. übers. - 2. Verlag u. 2. ISBN vom Schutzumschlag.
- Lüst, R. (1952). Die Entwicklung einer um einen Zentralkörper rotierenden Gasmasse. I. Lösungen der hydrodynamischen Gleichungen mit turbulenter Reibung. *Zeitschrift Naturforschung Teil A*, 7, 87.
- Lynden-Bell, D. (1969). Galactic Nuclei as Collapsed Old Quasars. *Nature*, 223, 690–694.
- Mestel, L. (1963). On the galactic law of rotation. *Monthly Notices of the RAS*, 126, 553.
- Noh, W. (1987). Errors for calculations of strong shocks using an artificial viscosity and an artificial heat flux. *Journal of Computational Physics*, 72(1), 78 – 120.
- Paczynski, B. (1978). A model of selfgravitating accretion disk. *Acta Astronomica*, 28, 91–109.
- Pringle, J. E. (1981). Accretion discs in astrophysics. *Annual Review of Astron and Astrophys*, 19, 137–162.
- Riess, A. G., Macri, L., Casertano, S., Sosey, M., Lampeitl, H., Ferguson, H. C., Filippenko, A. V., Jha, S. W., Li, W., Chornock, R., & Sarkar, D. (2009). A redetermination of the hubble constant with the hubble space telescope from a differential distance ladder. *The Astrophysical Journal*, 699(1), 539.

## Literaturverzeichnis

- Roe, P. (1986). Characteristic-based schemes for the euler equations. *Annual review of fluid mechanics*, 18(1), 337–365.
- Schmidt, K.-H. (1971). Abschätzung von quasarmassen. *Astronomische Nachrichten*, 293(3), 125–126.
- Schneider, P. (2006). *Einführung in die Extragalaktische Astronomie und Kosmologie*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- Shakura, N. I. (1972). Disk Model of Gas Accretion on a Relativistic Star in a Close Binary System. *Astronomicheskii Zhurnal*, 49, 921.
- Shakura, N. I. & Sunyaev, R. A. (1973). Black holes in binary systems. Observational appearance. *Astronomy and Astrophysics*, 24, 337–355.
- Shu, F. H. (1992). *The Physics of Astrophysics: Gas Dynamics*, volume 2. University Science books, 1st edition.
- Sperling, B. (2013). *Large Eddy Simulationen von selbstgravitierenden Akkretions-scheiben*. dissertation, Christian Albrechts Universität zu Kiel.
- Subramanian, P., Pujari, B. S., & Becker, P. A. (2004). Angular Momentum Transport in Quasi-Keplerian Accretion Disks. *Journal of Astrophysics and Astronomy*, 25, 81.
- Treffitz, E. (1952). Zur Entwicklung einer rotierenden Gasmasse. *Zeitschrift Naturforschung Teil A*, 7, 99.
- Weizsäcker, C. F. V. (1944). Über die Entstehung des Planetensystems. *Z. Astrophysik*, (pp. 22, 319).
- Zel'Dovich, Y. B., Raizer, Y. P., Probstein, R. F., & Hayes, W. D. (1967). *Physics of shock waves and high-temperature hydrodynamic phenomena*, 2. London, New York, Sydney: Academic press.

# Anhang

## A. Die Grundgleichungen in Zylinderkoordinaten

Nachfolgende Gleichungen wurden von Kato et al. (2008) übernommen. In einer ähnlichen Form sind sie ebenfalls im Landau & Lifšic (1974) angegeben.

**Kontinuitätsgleichung** in Zylinderkoordinaten über Gl. (2.1)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{r \partial r} (r \rho v_r) + \frac{\partial}{r \partial \varphi} (\rho v_\varphi) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) = 0 \quad (\text{A.1})$$

Hierin sind  $(v_r, v_\varphi, v_z)$  die Geschwindigkeitskomponenten in Zylinderkoordinaten.

**Bewegungsgleichungen** in Zylinderkoordinaten über Gl. (2.2) in die einzelnen Anteile aufgeschlüsselt, ergeben

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\varphi^2}{r} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + N_r \\ \rho N_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_{rr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} - \frac{\sigma_{\varphi\varphi}}{r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{v_r v_\varphi}{r} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial P}{\partial \varphi} + N_\varphi \\ \rho N_\varphi &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sigma_{\varphi r}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{\varphi z}}{\partial z} \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + N_z \\ \rho N_z &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_{zr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{z\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}, \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

## Anhang

wobei  $(N_r, N_\varphi, N_z)$  die Komponenten der viskosen Kraft sind.

Zuletzt wird noch der **viskose Spannungstensor** in Zylinderkoordinaten angegeben:

$$\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\varphi} & \sigma_{rz} \\ \sigma_{\varphi r} & \sigma_{\varphi\varphi} & \sigma_{\varphi z} \\ \sigma_{zr} & \sigma_{z\varphi} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\eta \frac{\partial v_r}{\partial r} + (\zeta - \frac{2}{3}\eta) \nabla \vec{v} & \eta \left[ r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_\varphi}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \right] & \eta \left( \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) \\ \eta \left[ r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_\varphi}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \right] & 2\eta \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r}{r} \right) + (\zeta - \frac{2}{3}\eta) \nabla \vec{v} & \eta \left( \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} \right) \\ \eta \left( \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) & \eta \left( \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} \right) & 2\eta \frac{\partial v_z}{\partial z} + (\zeta - \frac{2}{3}\eta) \nabla \vec{v} \end{pmatrix} \quad (\text{A.5})$$

Die **Energiegleichung** könnte über Gl. (2.4) ebenfalls in Zylinderkoordinaten angegeben werden, wird im folgenden aber nicht benötigt (siehe Abschnitt 2.1.1).

## B. Übergang der $\alpha$ - zur $\beta$ - Viskosität

Es gelten die Annahmen

- selbstgravitierende Scheibe
- hydrostatisches Gleichgewicht

$$P = \pi G \Sigma^2 \quad (\text{B.1})$$

- isotherme Scheibe (und Gl. (2.12))

$$\frac{P}{\rho} = c_s^2 \quad (\text{B.2})$$

$$\rho = \frac{\Sigma}{2h}$$

- integrierte Drehimpulserhaltung aus Kato et al. (2008)

$$\nu \Sigma = \frac{-\dot{M}}{2\pi r^3 \omega'} (r^2 \omega - \xi) \quad (\text{B.3})$$

wobei hier  $\xi = 0$  gesetzt wird.



### C. Herleitung der Gleichungen des Noh-Problems

Die  $\beta$  ( $\alpha$ )-Viskosität wird in Gl. (B.3) eingesetzt, nach  $\Sigma$  umgestellt und zusammen mit Gl. (B.1) in die Isothermiebedingung Gl. (B.2) eingesetzt. Damit folgt jeweils für die Schallgeschwindigkeiten

$$c_s^{(\beta)2} = -\frac{Gh\dot{M}}{\beta r^3 \omega'} \quad (\text{B.4})$$

$$c_s^{(\alpha)2} = -\frac{G\dot{M}\omega}{\alpha r c_s \omega'} \quad (\text{B.5})$$

die mit  $\beta = \beta_l \beta_v = \frac{l_t v_t}{r v_\varphi}$  in Gl. (B.4) eingesetzt

$$c_s^{(\beta)2} = -\frac{Gh\dot{M}\omega}{v_t l_t r \omega'}$$

liefert. In Duschl et al. (2000) wird der Übergang von der turbulenten in die Unterschallviskosität durch viskose Dissipation erklärt. Das bedeutet, dass der turbulente Energiefluss (über  $l_t$  und  $v_t$  charakterisiert) durch die Viskosität gedämpft wird, wodurch die Überschallgeschwindigkeiten wieder in den Unterschallbereich zurückfallen. Es gilt also

$$v_t \rightarrow w \quad \text{und} \quad l_t \rightarrow l,$$

dass die turbulenten Längen und Geschwindigkeiten in die der  $\alpha$ -Viskosität übergehen. Aus der umgestellten Gl. (2.37) folgt

$$\alpha = \frac{wl}{hc_s}$$

eingesetzt in Gl. (B.4) folgt Gl. (B.5).

## C. Herleitung der Gleichungen des Noh-Problems

An der Kontinuitätsgleichung Gl. (2.14) ändert sich nichts, die Drehimpulsgleichung Gl. (2.16) muss nicht mehr betrachtet werden. In der Impulsgleichung Gl. (2.15)

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Sigma v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r \Sigma (v_r^2 + c_s^2)] - \frac{\Sigma c_s^2}{r} = 0$$

*Anhang*

wird der zweite Term zunächst partiell abgeleitet und dann mit der umgestellten Kontinuitätsgleichung ersetzt. Weiteres umformen bringt

$$\frac{\partial}{\partial t}(v_r) + v_r \frac{\partial}{\partial r}(v_r) - \frac{c_s^2}{\Sigma} \frac{\partial}{\partial r}(\Sigma) = 0.$$

Die Kontinuitätsgleichung umgeschrieben mit den dimensionslosen Funktionen

$$v_r = v_2 V \qquad \Sigma_2 = \Sigma_1 S \qquad (\text{C.1})$$

wird zu

$$\frac{1}{S} \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{\Sigma_1} \frac{\partial \Sigma_1}{\partial t} + \frac{v_2 V}{r} + \frac{1}{S \Sigma_1} \frac{\partial}{\partial r}(\Sigma_1 v_2 S V) = 0$$

und wird mit der sehr hilfreichen allgemeinen Bedingung

$$\frac{t}{X} \frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial \ln(X)}{\partial \ln(t)}$$

weiter umgeformt.

$$\frac{\partial \ln(S)}{\partial t} + \frac{\partial \ln(\Sigma_1)}{\partial t} + \frac{v_2 V}{r} + \frac{v_2}{s} \frac{\partial(SV)}{\partial r} + \frac{V}{\Sigma_1} \frac{\partial(\Sigma_1 v_2)}{\partial r} = 0$$

Über die selbstähnliche Koordinate  $\xi = \frac{r}{v_2 t}$  und den Differentialtransformationen

$$\frac{\partial}{\partial \ln(r)} = \frac{\partial}{\partial \ln(\xi)} \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial}{\partial \ln(t)} = -\frac{\partial}{\partial \ln(\xi)}$$

folgt

$$-\frac{\partial \ln(S)}{\partial \ln(\xi)} - \frac{\partial \ln(\Sigma_1)}{\partial \ln(\xi)} + \frac{2V}{\xi} + \frac{1}{S\xi} \frac{\partial(SV)}{\partial \ln(\xi)} + V \frac{\partial\left(\frac{1}{\xi t}\right)}{\partial \ln(\xi)} + \frac{V}{\Sigma_1 \xi} \frac{\partial \Sigma_1}{\partial \ln(\xi)} = 0.$$

Der zweite und der letzte Term werden Null, da  $\Sigma_1$  nicht mehr von  $t$  abhängt. Der vorletzte Term kann umgeschrieben und der zweite Partiell abgeleitet werden. Formt man dies um, kommt man auf die Gleichung

$$\left(\frac{V}{\xi} \frac{\partial \ln(S)}{\partial \ln(\xi)}\right) + \left(1 + \frac{\partial \ln(V)}{\partial \ln(\xi)}\right) \frac{V}{\xi} = 0, \qquad (\text{C.2})$$

### C. Herleitung der Gleichungen des Noh-Problems

die zur Lösung des Systems angesetzt wird.

Obenstehende Impulsgleichung wird über die gleiche Vorgehensweise umgebaut. Über die dimensionslosen Funktionen folgt zunächst

$$\frac{1}{v_2} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{V}{v_2^2} \frac{\partial v_2}{\partial t} + \frac{V}{v_2} \left( V \frac{\partial v_2}{\partial r} + v_2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{c_s^2}{v_2^2 \Sigma_1 S} \left( \Sigma_1 \frac{\partial S}{\partial r} + S \frac{\partial \Sigma_1}{\partial r} \right) = 0,$$

und mit  $\xi$  und den Differentialtransformationen

$$-\xi \frac{\partial \ln(V)}{\partial \ln(\xi)} - \xi \frac{\partial \ln(v_2)}{\partial \ln(\xi)} + V \frac{\partial v_2}{\partial \ln(\xi)} + \frac{\partial V}{\partial \ln(\xi)} + \frac{\text{Ma}^{-2}}{V} \frac{\partial \ln(S)}{\partial \ln(\xi)} + \frac{\text{Ma}^{-2}}{V} \frac{\partial \ln(\Sigma_1)}{\partial \ln(\xi)} = 0.$$

Hier wurde wieder die Mach-Zahl Gl. (3.8) verwendet. Weiterhin fallen der zweite, der dritte und der letzte Term weg, da diese Größen nicht von  $\xi$  abhängen. Durch weiteres Umformen folgt dann

$$(V - \xi) \frac{\partial V}{\partial \ln(\xi)} + \text{Ma}^{-2} \frac{\partial \ln(S)}{\partial \ln(\xi)} = 0. \quad (\text{C.3})$$

Es gilt noch zu beachten, dass die partiellen Ableitungen als normale Ableitungen geschrieben werden können, da sie nur noch von der einen dimensionslosen Variablen abhängig sind, und durch die Transformation keine „Korrekturterme“ in die Gleichungen gebracht werden. Weiterhin wird Gl. (C.3) nach dem Term  $\frac{\partial \ln(S)}{\partial \ln(\xi)}$  umgeformt und in Gl. (C.2) eingesetzt. Man findet dadurch

$$\frac{dV}{d\xi} = \frac{V}{\xi} \frac{-1}{1 - \text{Ma}^2 (V - \xi)^2}$$

die wiederum in Gl. (C.3) eingesetzt auf

$$\frac{dS}{d\xi} = \frac{S}{\xi} \cdot \frac{\text{Ma}^2 V (V - \xi)}{1 - \text{Ma}^2 (V - \xi)^2} \quad (\text{C.4})$$

führt, und das System Gl. (3.14) liefert.

*Anhang*

# Liste der Abkürzungen

<b>AB</b>	Anfangsbedingung
<b>AS</b>	Akkretionsscheibe
<b>AGK</b>	Aktiver Galaktischer Kern
<b>DEH</b>	Drehimpulserhaltung
<b>DGL</b>	Differentialgleichung
<b>EEH</b>	Energieerhaltung
<b>FVV</b>	Finite-Volumen-Verfahren
<b>GZ</b>	Geisterzelle
<b>IEH</b>	Impulserhaltung
<b>RB</b>	Randbedingung
<b>RHB</b>	Rankine-Hugoniot-Bedingungen
<b>SL</b>	Schwarzes Loch
<b>SMSL</b>	supermassereiches Schwarzes Loch

## *Liste der Abkürzungen*

# Danksagung

Nur durch die tatkräftige Unterstützung verschiedener Personen wurde meine Arbeit auf dem Gebiet der Astrophysik erst ermöglicht. Auch während der Ausarbeitung riss diese Unterstützung nicht ab und gab mir immer wieder neue Impulse.

Herzlichsten Dank den Herren Prof. Dr. W. J. Duschl und Prof. Dr. Wim de Boer, ohne die diese Arbeit nicht möglich geworden wäre und die immer, menschlich wie auch fachspezifisch, äußerst hilfsbereite und entgegenkommende Ansprechpartner gewesen sind.

Weiterhin meinen Dank *allen* Mitarbeitern des ITAP, bei denen ich zu jeglicher Fragestellung immer und ausnahmslos sehr kompetente und freundliche Hilfestellung bekommen habe.

Nicht zuletzt besonderer Dank meiner Familie und meiner Freundin Dana, deren Unterstützung ich mir immer sicher sein konnte und die mir auch in schwierigsten Situationen geholfen haben.

## *Danksagung*



# Erklärung

Ich versichere hiermit, dass die vorliegende Diplomarbeit selbstständig verfasst und keine weiteren als die angegebenen Hilfsmittel benutzt sowie die Stellen der Arbeit, die in anderen Werken dem Wortlaut oder dem Sinn nach entnommen sind, durch Angaben der Quellen sichtbar gemacht wurden. Desweiteren hat diese Arbeit in dieser oder einer ähnlichen Form noch keiner Prüfungsstelle vorgelegen.

---

Ort, Datum

---

Stephan Deschner  
(1423058)