EINLEITUNG

Die Mechanik – genauer gesagt die klassische Mechanik, um sie von zum Beispiel der Quantenmechanik zu unterscheiden – stellt zugleich den Beginn und die Grundlage nicht nur der heutigen Physik, sondern in hohem Maße der modernen Naturwissenschaft überhaupt dar. Begründet wird sie durch ein Buch, das durch seine Folgen die Welt wohl stärker verändert hat als das Neue Testament, der Koran oder das Kapital von Marx:

Isaac Newton
Philosophiae Naturalis Principia Mathematica
Cambridge 1687

Um die Bedeutung dieser Neuerung einzuschätzen, ist es zweckmäßig, sich mit den vorhergehenden Anschauungen zu beschäftigen.

Das ursprüngliche Weltbild ist in allen Kulturen ein magisch-religiöses. Die Vorgänge in der Natur, also in der den Menschen umgebenden Welt, werden gedeutet als Folgen bewußter Handlungen übernatürlicher Wesen: Götter, Geister, Dämonen. Die "Wissenden" sind daher Priester, auch wenn die Naturbeobachtung, wie in Babylon, schon quantitativ ist. Raum und Zeit haben eine absolute Bedeutung. Die Welt ist flach und begrenzt, und das Zentrum der eigenen Kultur ist zugleich auch das der Welt, sei es nun Ägypten, Babylon, Rom oder das "Reich der Mitte" China. Darüber wölbt sich die recht flache Schale des Himmels, die am Weltrand aufliegt. Quantitative Angaben, soweit sie überhaupt gemacht werden, sind rein spekulativ. Der Raum ist also inhomogen, zugleich aber auch anisotrop: "oben" und "unten" sind absolute Kategorien. Auch die Zeit ist im allgemeinen absolut und inhomogen. Sie hat einen Anfang und ein Ende.

Zu einem völligen Umbruch, der einen fast an das Auftreten einer neuen Menschenart glauben lassen könnte, und damit zum Beginn dessen, was wir heute Naturwissenschaft nennen, kommt es um das Jahr - 700 herum mit dem Auftreten der griechischen Naturphilosophen, die eine ganz neue Haltung gegenüber der Welt einnehmen. Bezeichnenderweise sind sie keine Priester, sondern praktisch tätige, weitgereiste und weitgehend vorurteilsfreie Männer, in der Regel Atheisten oder allenfalls Pantheisten, was nach Schopenhauer ja nur eine höfliche Form des Atheismus ist. Sie stellen sich bewußt als Subjekt der Natur als Objekt gegenüber, betrachten die Welt also gewissermaßen von außen. Das Naturgeschehen ist für sie nicht eine Folge willkürlicher Akte übernatürlicher Wesen, sondern von inneren Gesetzmäßigkeiten beherrscht, die der Mensch mit seiner Vernunft erkennen kann. Ihr Weltbild ist also rational, aber anders als unser heutiges nicht kausal, sondern final, teleologisch. Das Weltgeschehen hat für sie einen Zweck, einen Sinn. Es wird beherrscht durch universelle Entwicklungs- und Ordnungsprinzipien – "Kosmos".

Zusammengefaßt und in einem gewissen Sinne abgeschlossen wird diese idealistische Naturphilosophie durch das Werk des Aristoteles, dessen Weltbild erst durch das von Newton begründete abgelöst wurde. Danach ist die Welt im wesentlichen kugelförmig, hat ein Zentrum und eine äußere Berandung, die Fixsternsphäre. Außerhalb ihrer befindet sich nichts, auch kein leerer Raum, der als denkunmöglich angesehen wird. Der Raum ist also nach wie vor inhomogen und anisotrop. Es gibt eine Vorzugsrichtung: hin zum Weltmittelpunkt, aber um diesen herum ist die Welt im wesentlichen isotrop. Die Begriffe "oben" und "unten" sind also relativ. Das Universum war schon immer und wird immer sein. Die Zeit hat also weder einen Anfang noch ein Ende, sie ist absolut, aber homogen.

Die Welt zerfällt in zwei Teile, den irdischen und den himmlischen, die aber beide rational betrachtet werden. Die quantitative Beschreibung von Bewegungen in Raum und Zeit (Kinematik) ist für beide die gleiche, insbesondere gelten auch im himmlischen Bereich die Gesetze der Geometrie, verschieden ist die Erklärung der Ursachen der Bewegung (Dynamik). Im heutigen Verständnis bilden Kinematik und Dynamik zusammen die Mechanik, für Aristoteles bleiben sie getrennt. Wegen ihres quantitativen geometrischen Charakters zählt für ihn – und bis in die Zeit Keplers – die Kinematik zur Mathematik, die nicht-quantitative Dynamik und die damit zusammenhängende Struktur der Materie zur Physik.

Diese Struktur ist nun in beiden Teilen der Welt wesentlich verschieden. Die irdische Materie ist aus vier Elementen (Erde, Wasser, Luft, Feuer) aufgebaut und hat, je nach ihrer Zusammensetzung, Anteil an deren Eigenschaften. Sie ist zum Beispiel absolut schwer oder leicht, dabei ist "leicht" nicht ein geringerer Grad von "schwer", sondern ihm entgegengesetzt. Es gibt keine Bewegung ohne Beweger. Schwere Körper streben auf Grund einer inneren oder "lebendigen" Kraft zum Weltmittelpunkt. Ihre freie Bewegung ist also stets abwärts gerichtet, sie suchen dort ihren "natürlichen Ort". Sie fallen umso schneller, je schwerer sie sind. Umgekehrt strebt absolut leichte Materie stets aufwärts und steigt äußerstenfalls bis zur unteren Begrenzung des Himmels, der Sphäre des Mondes, auf. Jede seitliche Bewegung eines Körpers muß dagegen erzwungen werden durch eine äußere oder "tote" Kraft und hört ohne Antrieb auf. Die irdische oder sublunare Welt ist unvollkommen und ständigem Wandel unterworfen. Im Gegensatz dazu besteht die himmlische Materie aus dem fünften Grundstoff, der schwerelosen "quinta essentia". Sie ist vollkommen und unwandelbar. Das gleiche gilt von ihrer Bewegung. Diese erfolgt daher gleichmäßig in Kreisen und auf Kugelschalen um den Weltmittelpunkt herum.

Die Erde ist kugelförmig, und, wie Aristoteles sagt, "nicht sehr groß". Eratosthenes hat auf geistreiche Weise (Brunnen von Syene) ihren Umfang zu 252000 Stadien gemessen. Da die Länge eines Stadions nicht einheitlich festgelegt war, kann man bei entsprechender Auswahl zu einem Wert des Erdumfangs von 39690 km kommen, der fast exakt mit dem modernen Wert von 40075 km übereinstimmt, realistisch dürfte eine Genauigkeit von etwa 10% sein. Auch zu dieser umwälzenden Erkenntnis ist keine andere Kultur unabhängig von der griechischen fähig gewesen. Da der Erdkörper aus schwerer Materie besteht, fällt sein Mittelpunkt mit dem der Welt zusammen, nicht umgekehrt! Die Himmelskörper sind ebenfalls Kugeln mit meßbaren Radien. Die Phasen des Mondes und Mond- und Sonnenfinsternisse werden geometrisch als Beleuchtungs- und Schatteneffekte gedeutet und zur Bestimmung von Radien und Entfernungen benutzt, wiederum eine einzig dastehende Leistung der Griechen. Wegen der unzureichenden Meßgenauigkeit werden allerdings Radius und Entfernung der Sonne und damit die Dimensionen des Sonnensystems um einen Faktor 25 unterschätzt.

Zur Physik des Aristoteles gibt es in der griechischen Naturphilosophie durchaus Gegenmeinungen. Nach Demokrit ist alle Materie aus verschiedenen Arten von nicht weiter zerlegbaren Teilchen, den Atomen, aufgebaut, die sich ziellos im unbegrenzten leeren Raum bewegen und bei Zusammenstößen wechselwirken. Das Naturgeschehen verläuft kausal, nicht final. Dieses rational-materialistische Weltbild steht im scharfen Gegensatz zu dem rational-idealistischen des Aristoteles und gilt sogar bei den sehr freigeistigen Griechen als atheistisch. Ebenfalls im Gegensatz zu Aristoteles steht die viel später von Kopernikus wieder aufgenommene Lehre des Aristarch von Samos, daß sich die Erde bewegt. Da diese konkurrierenden Auffassungen rein spekulativ sind und keine Stütze in den damals bekannten Naturerscheinungen finden, bleiben sie in einer Außenseiterrolle. Das ist nicht der Fall mit den kinematischen Theorien von Hipparch und Ptolemäus. Die sehr genauen astronomischen Beobachtungen zeigen, daß die Bewegung der Himmelskörper, speziell der Sonne, um die Erde und damit um den Weltmittelpunkt herum keine gleichförmige Kreisbewegung sein kann. Um die Beobachtungen darzustellen, "die Phänomene zu retten", werden exzentrische Kreise und Bewegungsmittelpunkte oder Epizykel verwendet, was notwendig die Veränderung des Abstandes vom Weltmittelpunkt zur Folge hat. Dieser Widerspruch zur Theorie des Aristoteles wird zwar gesehen, aber nicht sehr ernst genommen, da man die Bahnen ohnehin nur als mathematische Konstruktionen betrachtet. Ihren Höhepunkt erreicht diese Kinematik der Himmelskörper um das Jahr 150 herum im zusammenfassenden Werk des Ptolemäus: "matematike syntaxis", woraus die Zeitgenossen zunächst "megale syntaxis", dann sogar "megiste syntaxis" machen. Bei der Übersetzung ins Arabische wird daraus "al magisti" und schließlich bei der Übertragung ins Lateinische "almagestum".

Zwischen der "syntaxis" und dem Almagest liegt ein Jahrtausend ohne nennenswerten Fortschritt. Das ist im wesentlichen darauf zurückzuführen, daß sich im niedergehenden römischen Reich etwa ab dem Jahre 300 eine weltabgewandte, wissenschaftsfeindliche und extrem intolerante Ideologie durchsetzt und 394 zur Staatsreligion wird: das fundamentalistische Christentum. Für die geistigen Führer dieser Bewegung, die Kirchenväter, insbesondere Lactantius, Augustinus und Hieronymus, handelt es sich bei der griechischen Naturwissenschaft um die "törichte Weisheit der heidnischen Philosophen", die sowohl dem gesunden Menschenverstand, als auch, und das ist entscheidend, der "Heiligen Schrift" widerspricht. Insbesondere können sie sich nicht von der Vorstellung eines absoluten "oben" und "unten" lösen. Sie stellen dem ein eigenes Weltbild entgegen, das aus Bibelstellen begründet wird und seine Zusammenfassung um 500 herum in der "Topographia Christiana", der christlichen Weltbeschreibung des Cosmas Indicopleustes, findet. Danach ist die Erde flach und viereckig. Die Welt ähnelt einer Truhe, deren gewölbter Deckel einerseits die "Wasser über der Feste" enthält und andererseits den Wohnsitz der himmlischen Heerscharen bildet. Sonne, Mond und Sterne werden von Engeln herumgetragen, und das Dunkel der Nacht entsteht dadurch, daß die Sonne sich hinter einem hohen Berg im Norden befindet. Es handelt sich also um eine primitive Version des tausend Jahre älteren babylonischen Weltbildes. Gleichzeitig wird, besonders im weströmischen Reich, die philosophische und wissenschaftliche Literatur der Antike bis auf ein paar Werke lateinischer Kompilatoren fast vollständig vernichtet. Es beginnt im Jahre 391 mit dem Niederbrennen des Museion, der weltberühmten Bibliothek von Alexandria, an der unter anderem Eratosthenes und Ptolemäus gewirkt haben, und führt dazu, daß um das Jahr 700 im gesamten Abendland weder die Werke von Aristoteles und Ptolemäus noch die von Euklid und Apollonius oder Hippokrates und Galenus mehr zu finden sind.

Daß das Erbe der antiken Kultur nicht unwiederbringlich verloren ging, ist dem Auftreten einer konkurrierenden Ideologie, des Islam, zu verdanken, der zwar ähnlich intolerant, aber nicht in gleichem Maße mystisch-irrational eingestellt ist. Ab dem Jahre 700 beginnen die Kalifen Al Mansur, Harun al Raschid und Al Mamun in Bagdad mit dem systematischen Sammeln aller Reste der griechischen Wissenschaft, dabei wird insbesondere der Almagest auf dem Umwege über das Syrische ins Arabische übersetzt und intensiv studiert.

Ab der Mitte des 10. Jahrhunderts setzt sich auch im Abendland durch den Kontakt mit der arabischen Welt die Lehre von der Kugelgestalt der Erde wieder durch, und von 1100 bis 1300 werden die Werke von Aristoteles, Euklid und Ptolemäus neben vielen anderen aus dem Arabischen ins Lateinische übersetzt. Es kommt zu einer Wiedergeburt – "Renaissance" – der antiken Kultur. Auf die Herabwürdigung folgt eine kritiklose Überschätzung insbesondere der Schriften des Aristoteles, zunächst der über Logik, dann auch der über Naturphilosophie. "Der Philosoph" wird zur unumstrittenen Autorität in allen außer Glaubensfragen. Sein Weltbild wird nur insofern modifiziert, als jetzt außerhalb der Fixsternsphäre der Wohnsitz Gottes und der Engel, innerhalb der Erde die Hölle angesiedelt wird.

In den folgenden zwei Jahrhunderten kommt es aber auch gerade durch die Beschäftigung mit der aristotelischen Logik zur Kritik an Einzelheiten seiner Naturphilosophie. Nikolaus von Kues erörtert zum Beispiel spekulativ-philosophisch die Möglichkeit eines unendlich ausgedehnten Raumes ohne Mittelpunkt und Berandung. Im besonderen ist Gegenstand der Kritik aber die Lehre von der Wurfbewegung, die schon im Altertum als nicht sehr überzeugend angesehen wurde. Dazu trägt unter anderem auch die Entwicklung der Artillerie nach der Erfindung des Schießpulvers bei. Im 17. Jahrhundert wird schließlich die These von der Unmöglichkeit eines leeren Raumes ("horror vacui") durch Torricelli und von Guericke widerlegt, was zur Neubewertung des Atomismus führt.

Noch wichtiger sind die Entwicklungen in der Kinematik der Himmelskörper. Um 1500 greift Kopernikus die Lehre von der Bewegung der Erde wieder auf, nimmt die Sonne als im Weltzentrum befindlich an und ersetzt die Rotation der Fixsternsphäre durch die der Erde. Obwohl das neue Weltbild dem alten kinematisch fast völlig äquivalent ist und auch für die Positionsberechnungen keine wesentliche Verbesserung darstellt, sind seine dynamischen Konsequenzen revolutionär. Die Erde verliert ihre Sonderstellung und wird ein Planet unter anderen. Die Fixsterne müssen nicht mehr von einer Sphäre getragen werden und brauchen daher auch nicht im gleichen Abstand vom Mittelpunkt zu stehen, sondern können im Raum verteilt sein. In noch stärkerem Gegensatz zum antiken Weltbild stehen die Keplerschen Gesetze, wonach die relativen Bewegungen der Himmelskörper nicht aus gleichförmigen Kreisbewegungen, sondern aus ungleichförmig durchlaufenen Ellipsen zusammengesetzt sind. Gleichzeitig, also zu Beginn des 17. Jahrhunderts, widerlegt Galilei sowohl durch seine quantitativen Fallversuche als auch durch seine Beobachtungen mit dem Teleskop (Berge auf dem Mond) das Dogma vom grundsätzlichen Unterschied zwischen himmlischer und irdischer Materie. Er gibt auch die Trennung zwischen Kinematik und Dynamik auf: "Das Buch der Natur ist in der Sprache der Mathematik geschrieben."

Die Kirche fühlt, durchaus nicht ohne Grund, die Basis ihrer Anschauungen bedroht und versucht mit Hilfe der Inquisition die neuen Erkenntnisse zu unterdrücken, aber erfolglos. Schon 12 Jahre nach dem Prozeß gegen Galilei (1633) kommt es in London zur Gründung einer Vorläuferin der späteren Royal Society. Hier nimmt auch die Trennung der beiden Kulturen, wie C.P. Snow sie später genannt hat – nämlich der literarisch-philosophischen und der naturwissenschaftlich-technischen – ihren Anfang, denn das Programm der Royal Society ist: "To improve the knowledge of natural things, and all useful Arts, Manufactures, Mechanick practices, Engynes and Inventions by Experiments (not meddling with Divinity, Metaphysics, Moralls, Politicks, Grammar, Rhetorick or Logick)". Im Jahre 1672 wird der 1642 – also im Todesjahr Galileis – geborene Isaac Newton Fellow und 1703 Präsident dieser Gesellschaft. Ihr langjähriger Sekretär Edmund Halley bringt ihn mit vieler Mühe 1687 dazu, die "Principia" auf Kosten der Gesellschaft zu veröffentlichen. Die Wirkung auf die Zeitgenossen geben die Verse von Alexander Pope wieder:

> Nature and Nature's Laws
> Lay hid in Night.
> God said: Let Newton be!
> And all was Light.

Damit ist das neue Weltbild weitgehend vollendet und bildet eine der Grundlagen des folgenden Jahrhunderts der Aufklärung ("Enlightenment", "Siècle des Lumières"). Auf dem Kontinent werden Newtons Arbeiten nach 1738 populär durch die "Élémens de la philosophie de Neuton" von Voltaire und Emilie du Châtelet, die später auch die "Principia" ins Französische übersetzt. Es folgt, hauptsächlich in Frankreich und der Schweiz, eine stürmische Entwicklung der theoretischen Mechanik und ihrer analytischen Grundlagen durch eine Reihe genialer Mathematiker: die Bernoullis, Euler, Clairaut, d'Alembert, Lagrange, Laplace, Legendre. Sie tragen wesentlich zur Entwicklung eines mechanistisch-rationalistischen Weltbildes bei, einer der Grundlagen der französischen Revolution. Zu einer kurzlebigen Gegenreaktion kommt es um 1800 mit der "romantischen Physik", der spekulativen Naturphilosophie der Vertreter des deutschen Idealismus, insbesondere Hegel, die aber eher ein Kuriosum bleibt. Gleichzeitig wird die analytische Mechanik weiterentwickelt durch Gauß, Jacobi und Hamilton und erreicht einen gewissen Abschluß um 1900 herum mit den Arbeiten von Poincaré, die schon in Verbindung mit der speziellen Relativitätstheorie einerseits und dem Stabilitätsverhalten nichtlinearer Systeme (Chaos-Theorie) andererseits stehen.

Die wissenschaftliche Methode Newtons, die bis heute die der Naturwissenschaft geblieben ist, unterscheidet sich grundlegend von der der idealistischen Naturphilosophie, sowohl seines Vorgängers Aristoteles, als auch seines Zeitgenossen Descartes und seines Nachfolgers Hegel. Während diese der Meinung waren, die Naturgesetze durch reines Denken aus allgemeinen metaphysikalischen Grundsätzen logisch ableiten zu können, ist für Newton die Erfahrung, sowohl die zufällige, als auch die durch systematische Experimente gewonnene, die einzige Quelle naturwissenschaftlicher Erkenntnisse. Eine Erklärung aus philosophischen Prinzipien lehnt er ab: "Hypotheses non fingo." Seine induktiv-deduktive Methode besteht darin, zunächst aus gesammelten Erfahrungen induktiv auf Gesetzmäßigkeiten zu schließen. Aus ihrer Annahme werden dann deduktiv weitere Phänomene vorhergesagt und die Theorie im Experiment überprüft. Bei einer Falsifikation muß sie aufgegeben oder modifiziert werden.

Gegenstand der Physik sind ausschließlich Erscheinungen, die sich zumindest prinzipiell messen lassen. Physikalische Größen werden durch Meßprozesse definiert, nicht verbal ("Wortgeklingel"), wie etwa in der Naturphilosophie von Hegel und Schelling. Da die Erfahrungen als Ergebnisse von Messungen in der Regel als Zahlen vorliegen, sind die Gesetzmäßigkeiten in der physikalischen Theorie notwendig mathematische Beziehungen, aus denen ebenfalls quantitative Vorhersagen abgeleitet werden. Die Welt der Erfahrungen wird so auf eine mathematische Modellwelt abgebildet, an die als einzige Bedingung die der logischen Konsistenz gestellt wird. Sie braucht nicht "höheren Prinzipien" oder dem "gesunden Menschenverstand" zu genügen, sofern sie nur in der Lage ist, die Gesamtheit der Erfahrungen im Rahmen der Meßgenauigkeit zu reproduzieren.

A. NEWTON-MECHANIK

Für Newton bilden Kinematik und Dynamik – im Gegensatz zu Aristoteles, aber in Übereinstimmung mit Galilei – eine Einheit, die quantitative, also mathematisierte, Mechanik. Er baut sie nach dem Muster der "Elemente" des Euklid ("more geometrico") auf, geht also aus von einer Reihe von Begriffserklärungen (Scholien) und Axiomen (Bewegungsgesetze). Diese folgen letztlich induktiv aus der Erfahrung, dem Experiment, und nicht aus metaphysikalischen Überlegungen. Sie werden bestätigt (oder falsifiziert), indem aus ihnen deduktiv Voraussagen hergeleitet und mit weiteren Experimenten verglichen werden.

1. Die Newtonschen Axiome

Newton beginnt mit Aussagen über Raum und Zeit (Kinematik). Der absolute Raum ist leer, unendlich ausgedehnt, homogen und isotrop, die absolute Zeit homogen. Durch die Einführung eines Koordinatensystems werden den Raumpunkten – letztlich durch Messungen mit Maßstäben – Zahlentripel $\boldsymbol{r}$ zugeordnet. Der Raum wird dadurch auf ein mathematisches Objekt, einen dreidimensionalen affinen Vektorraum $\mathbb{R}^3$, abgebildet. Ebenso werden den Zeitpunkten – durch Messungen mit Uhren – die Elemente t eines eindimensionalen Raumes $\mathbb{R}^1$ zugeordnet und damit den Ereignissen $(\boldsymbol{r}, t)$ das Kroneckerprodukt $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^1$. Die Eigenschaften von Raum und Zeit selbst sind auf diese Weise grundsätzlich Gegenstand von Experimenten (Messungen) und somit der Erfahrung und – im Gegensatz etwa zur Auffassung von Kant – keine a-priori-Kategorien.

Es folgen drei Axiome über die Bewegung materieller Körper und ihre Ursachen (Dynamik). Materielle Objekte sind aus Massenpunkten, von Newton "Körper" genannt, aufgebaut, die in vielen Eigenschaften mit den Atomen des Demokrit übereinstimmen, aber von beliebiger Größe sein können. Sie haben einen wohldefinierten Ort, beschrieben durch einen Ortsvektor $\boldsymbol{r}(t)$. Die Ursachen für ihre Bewegung sind nicht final, sondern kausal. Sie agieren nicht, wie bei Aristoteles, auf Grund eines inneren Bestrebens, sondern reagieren nur auf äußere Einwirkungen, von Newton "Kräfte" genannt, die letzlich von anderen Körpern ausgeübt werden, sind also "träge" (inert). Im völligen Gegensatz zur aristotelischen Physik können sie sich aber auch ohne Beweger bewegen:

LEX I.

Jeder Körper verharrt in seinem Zustand der Ruhe oder gleichförmigen geradlinigen Bewegung, wenn er nicht durch einwirkende Kräfte gezwungen wird, seinen Zustand zu ändern.

Liegt eine solche Einwirkung vor, dann wird durch sie primär nicht der Ort verändert - das geschieht ja auch bei der geradlinig-gleichförmigen Bewegung - sondern die Geschwindigkeit. Während alle Vorgänger, auch Demokrit, davon ausgingen, daß eine Kraft auf einen Körper nur bei direktem Kontakt wirken kann, nimmt Newton an, daß die Kraftwirkung wie beim Magnetismus durch den leeren Raum hindurch erfolgt (Fernkraft, "action at a distance"). Sie muß daher momentan vor sich gehen. Die entsprechende Geschwindigkeitsänderung geschieht nicht sprungweise, wie zum Beispiel bei einzelnen Stößen, deren Wahrscheinlichkeit für punktförmige Körper ohnehin verschwindend klein ist, sondern kontinuierlich. Eine solche veränderliche Geschwindigkeit kann exakt nur durch einen Grenzwertprozeß definiert werden, nämlich als Differentialquotient:

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \ .$$

Zur Formulierung der Newtonschen Theorie ist deshalb die Infinitesimalrechnung erforderlich, was mathematischen Laien den Zugang sehr erschwert.

Bei gleicher äußerer Einwirkung ist die Geschwindigkeitsänderung für verschiedene Massenpunkte unterschiedlich. Newton schreibt deshalb den Körpern eine invariante innere Eigenschaft zu: die träge Masse. Er definiert sie als "Menge der Materie" oder als Produkt von Volumen und Dichte. Das ist zunächst eine Zirkeldefinition und keine Meßvorschrift. Sie erhält einen Sinn, wenn man bedenkt, daß vom atomistischen Standpunkt aus jeder Körper aus einer bestimmten Anzahl gleichartiger Elementarteilchen aufgebaut ist. Die Masse ist dann proportional zu dieser Anzahl. Je größer die Masse m eines Körpers ist, desto kleiner fällt die durch eine gegebene Einwirkung $\boldsymbol{F}$ erzeugte Geschwindigkeitsänderung aus. Es gilt also:

$$\frac{d}{dt}(m\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{F} \ .$$

Mit der Bewegungsgröße $m\boldsymbol{v}$ lautet dann das für die Newtonsche Mechanik grundlegende Kraftwirkungsgesetz, die Bewegungsgleichung:

LEX II.

Die Änderung der Bewegung ist der Einwirkung der bewegenden Kraft proportional und geschieht nach der Richtung derjenigen geraden Linie, nach welcher jene Kraft wirkt.

Auch die Kraft wird nicht durch eine Meßvorschrift definiert. Die in der LEX II genannte Proportionalität ist so zu verstehen, daß wenn ein kraftausübender Körper an einem gegebenen Ort durch eine Anzahl N gleichartiger ersetzt wird, die Wirkung auf das N-fache steigt. Da die Masse eines Körpers als invariante Größe betrachtet wird, kann man die Änderung der Bewegungsgröße (Linearimpuls) durch die Beschleunigung $\boldsymbol{a}$ ersetzen:

$$\frac{d}{dt}(m\boldsymbol{v}) = m\,\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = m\,\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = m\,\boldsymbol{a} \ ,$$

und die Bewegungsgleichung für einen Massenpunkt erhält die Form

$$\boldsymbol{F} = m\,\boldsymbol{a} \ .$$

Die auf den Körper von den umgebenden Objekten ausgeübte Kraft kann nur von seinem relativen Ort $\boldsymbol{r}$ und seiner relativen Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ in Bezug auf diese Umgebung abhängen, da der leere Raum einerseits homogen ist und andererseits nicht selbst auf den Körper einwirken kann. Es gilt daher:

$$m\,\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}, \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}, t) \ .$$

Wenn also der Ort $\boldsymbol{r}$ und die Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ eines Körpers zu einem Zeitpunkt t gegeben sind, folgt daraus zwangsläufig zunächst die Änderung $\Delta\boldsymbol{v}$ der Geschwindigkeit und damit $\Delta\boldsymbol{r}$ des Ortes im Zeitintervall Δt. Damit sind Ort und Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ gegeben. Dieses Verfahren kann unbegrenzt fortgesetzt werden. Die Bahn $\boldsymbol{r}(t)$ ist also durch die kausale Wechselwirkung $\boldsymbol{F}$ und die Anfangswerte $\boldsymbol{r}_0$ und $\boldsymbol{v}_0$ für alle Zeiten eindeutig festgelegt, determiniert. Die Bewegungsgleichung hat eine völlig andere Bedeutung als etwa das Ohmsche Gesetz $U = RI$. Es handelt sich nicht um eine überprüfbare Beziehung zwischen zwei meßbaren physikalischen Größen, sondern um eine gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung mit Randbedingungen, der die gesuchte

Bahn $\boldsymbol{r}(t)$ bei gegebener Wechselwirkung genügen muß. Sie ist also auch nicht etwa eine bloße Definitionsgleichung für $\boldsymbol{F}$. Die Unschärfe des Begriffes "Kraft", die noch dadurch verstärkt wird, daß dieses Wort umgangssprachlich in sehr verschiedener Bedeutung gebraucht wird (Muskelkraft, Ausdruckskraft, Manneskraft, "Atomkraft" usw.), spielt zwar bei der Anwendung der Bewegungsgleichung in konkreten Situationen keine Rolle, hat aber langwierige methodische und philosophische Diskussionen ausgelöst. In der Lagrange- und Hamilton-Formulierung der Mechanik wird der Begriff der Wechselwirkungskraft deshalb ersetzt durch den präzisen der Wechselwirkungsenergie.

Über die Natur der auf einen Körper einwirkenden Objekte wurde bisher keine Aussage gemacht. Entsprechend dem Newtonschen Weltbild muß es sich dabei natürlich um Aggregate von Massenpunkten handeln. Das einfachste physikalische System, in dem eine Einwirkung stattfindet, besteht daher aus zwei Körpern mit den Massen m_1 und m_2. Wenn der Körper 2 auf den Körper 1 eine Kraft $\boldsymbol{F}_{12}$ ausübt:

$$m_1 \frac{d^2\boldsymbol{r}_1}{dt^2} = \boldsymbol{F}_{12} ,$$

muß aus Symmetriegründen auch gelten:

$$m_2 \frac{d^2\boldsymbol{r}_2}{dt^2} = \boldsymbol{F}_{21} .$$

Newton postuliert daher als drittes Axiom:

LEX III.

Die Wirkung ist stets der Gegenwirkung gleich, oder die Wirkungen zweier Körper aufeinander sind stets gleich und von entgegengesetzter Richtung.

Dieses sogenannte Reaktionsprinzip ("actio = reactio") führt im vorliegenden Fall zu

$$\boldsymbol{F}_{12} = -\boldsymbol{F}_{21} .$$

Es ist zu beachten, daß die Kräfte zwischen zwei wechselwirkenden Massenpunkten zwar entgegengesetzt gleich sind, aber mit der Verbindungslinie der beiden Körper einen Winkel bilden können und außer von ihrer relativen Lage auch von ihrer relativen Geschwindigkeit und eventuell explizit von der Zeit abhängen können. Im Grunde widerspricht das dem Begriff von ausdehnungslosen Massenpunkten, deren Wechselwirkung momentan erfolgt. Wegen der Isotropie des leeren Raumes muß die Kraft aus Symmetriegründen in der Verbindungslinie liegen. Wegen der momentanen Ausbreitung der Wirkung kann nur der augenblickliche Ort, nicht ein vorheriger und damit auch nicht die Geschwindigkeit, eine Rolle spielen. Da Körper letztlich aus unveränderlichen Bausteinen (Atome) aufgebaut sind, kann ihre Wechselwirkung auch nicht explizit von der Zeit abhängen. Die Wechselwirkungskräfte zwischen zwei Massenpunkten müssen daher in ihrer Verbindungslinie liegen und eine Funktion allein ihres Abstands sein.

Diese Überlegungen lassen sich ohne Änderung auf den Fall von N wechselwirkenden Massenpunkten übertragen. Es muß dann gelten:

$$\boldsymbol{F}_{ik} = -\boldsymbol{F}_{ki} .$$

Bei mehr als zwei Körpern entsteht das Problem der Überlagerung von mehreren gleichzeitigen Einwirkungen auf einen Massenpunkt. Daß die Kräfte Vektoren im physikalischen Sinn, also gegenüber Drehungen des Koordinatensystems im Raum invariante Größen mit

Richtung und Betrag sind, bedeutet nicht notwendig, daß sie auch einen linearen Vektorraum im mathematischen Sinn bilden. Ein Gegenbeispiel liefert die Darstellung räumlicher Drehungen durch "Drehvektoren", deren Richtung mit der Drehachse übereinstimmt und deren Betrag gleich dem Tangens des halben Drehwinkels ist. Da diese Drehungen, außer für infinitesimale Drehwinkel, nicht miteinander kommutieren, erhält man den Drehvektor einer zusammengesetzten Drehung im allgemeinen nicht durch Vektoraddition (Parallelogrammkonstruktion) aus den Drehvektoren der beiden Teildrehungen. In entsprechender Weise könnten sich auch Kräfte bei der Zusammensetzung gegenseitig beeinflussen. Die Bewegung unter dem Einfluß der resultierenden Kraft müßte nicht notwendig durch lineare Zusammensetzung der beiden Teilbewegungen entstehen. Nach Aristoteles stören sich sogar verschiedene Bewegungen grundsätzlich, ein Körper kann daher in jedem Augenblick nicht mehr als eine Bewegung ausführen. Von gleicher Bedeutung wie die drei ersten Axiome ist deshalb Newtons

COROLLARIUM I.

Wirken auf einen Körper zwei Kräfte gleichzeitig, so setzen sie sich zur Diagonale des Parallelogramms zusammen.

Teilkräfte erzeugen also unabhängige Teilbewegungen. Eine Kraft kann daher in beliebiger Weise in Komponenten zerlegt werden.

Für ein System von N Massenpunkten lauten die Bewegungsgleichungen dann

$$m_i \frac{d^2 \boldsymbol{r}_i}{dt^2} = \sum_{j \neq i} \boldsymbol{F}_{ij}(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j, \boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_j, t) \qquad , \qquad i = 1, ..., N \ .$$

Das ist ein System von $3N$ gekoppelten (simultanen) gewöhnlichen Differentialgleichungen 2. Ordnung. Mit den Anfangsbedingungen

$$\boldsymbol{r}_i(0) = \boldsymbol{r}_{i0} \qquad , \qquad \boldsymbol{v}_i(0) = \boldsymbol{v}_{i0}$$

ergeben sich daraus nach dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz die vollständig determinierten Bahnen

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i(\boldsymbol{r}_{10}, \ldots, \boldsymbol{r}_{N0}, \boldsymbol{v}_{10}, \ldots, \boldsymbol{v}_{N0}, t) \ .$$

Wenn man sich auf den extremen Standpunkt des Demokrit ("Wirklich sind nur Atome und Leeres") stellt, daß die Welt ausschließlich aus einer sehr großen Anzahl wechselwirkender Massenpunkte aufgebaut ist, liefe das Geschehen in der Welt also wie ein Uhrwerk ab (mechanistisches Weltbild) und ließe zum Beispiel die Existenz eines freien Willens nicht zu. Die einzige, allerdings recht umfangreiche, Aufgabe der Mechanik wäre dann die Integration dieses riesigen Systems von Differentialgleichungen.

Eine solche Behandlung der Welt als Ganzes ist natürlich unmöglich. Man zerlegt sie daher in den Teil, für den man sich im wesentlichen interessiert, das physikalische System, und den Rest, die Umgebung. Wenn zwischen beiden keine Wechselwirkung besteht, nennt man das System abgeschlossen. Seine zeitliche Entwicklung verläuft dann genauso, als ob es sich allein im leeren Raum befände. Exakt ist dieser Fall natürlich nie realisiert. Wenn die Wechselwirkung mit der Umgebung nicht vernachlässigbar ist, kann man versuchen, das System durch Hinzunahme derjenigen Massenpunkte der Umgebung, mit denen es wechselwirkt, zu erweitern, aber auch dieses Verfahren ist nie exakt möglich und führt zudem im allgemeinen zu einer wesentlichen Komplizierung. Häufig ist aber zwar eine erhebliche Einwirkung der Umgebung auf das System vorhanden, während die Rückwirkung des Systems auf die Umgebung vernachlässigt werden kann. Für das betrachtete System ist der umgebende Raum dann im allgemeinen weder homogen noch isotrop und, da die Vorgänge in der Umgebung von ihm unbeeinflußt ablaufen, die Zeit nicht mehr homogen. Die Bewegungsgleichungen nehmen dann die Form an:

$$m_i \frac{d^2 \boldsymbol{r}_i}{dt^2} = \sum_{j \neq i} \boldsymbol{F}_{ij}(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j, \boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_j, t) + \boldsymbol{F}_i^{(e)}(\boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{v}_i, t)$$

Hier stellen die $\boldsymbol{F}_i^{(e)}$ die einseitige Wechselwirkung mit der Umgebung (äußere Kräfte) dar.

Aus dem dritten Axiom läßt sich eine sehr wichtige Folgerung ziehen. Für ein abgeschlossenes System von zwei Körpern ist

$$\boldsymbol{F}_{12} = -\boldsymbol{F}_{21} \qquad \rightarrow \qquad m_1 \frac{d^2 \boldsymbol{r}_1}{dt^2} = -m_2 \frac{d^2 \boldsymbol{r}_2}{dt^2} \ .$$

Daraus folgt durch Integration nach der Zeit

$$m_1 \boldsymbol{v}_1 + m_2 \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{P} \ ,$$

wobei $\boldsymbol{P}$ ein zeitlich konstanter Vektor ist. Für N Massenpunkte gilt entsprechend

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{P} \ .$$

Der gesamte Linearimpuls eines abgeschlossenen Systems von wechselwirkenden Massenpunkten bleibt also bei der Bewegung des Systems erhalten, er ist ein Bewegungsintegral ("(first) integral of motion"). Damit bezeichnet man allgemein eine Funktion der Orts- und Geschwindigkeitsvektoren

$$f(\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_N, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_N, t) \ ,$$

deren Wert sich bei der zeitlichen Bewegung des Systems nicht ändert, also nur von den Anfangswerten $\boldsymbol{r}_{i0}, \boldsymbol{v}_{i0}$ abhängt. Falls diese Funktion nicht explizit von t abhängt, nennt man sie eine Erhaltungsgröße ("conserved quantity"). Nach dem Theorem von Noether folgt aus jeder Symmetrie eines physikalischen Systems die Existenz eines Bewegungsintegrals und umgekehrt. Eine solche Symmetrie liegt vor, wenn bei der Symmetrietransformation

$$\bar{\boldsymbol{r}}_i = \bar{\boldsymbol{r}}_i(\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_N, t)$$

die Bewegungsgleichungen des Systems ihre Gestalt nicht ändern (Forminvarianz). Aus den Symmetrieeigenschaften von Raum und Zeit (Homogenität und Isotropie) folgt, daß die Bewegungsgleichungen eines abgeschlossenen Systems invariant gegenüber Verschiebungen und Drehungen im Raum und Verschiebungen des Zeitanfangspunktes sein müssen. Wie noch gezeigt werden wird, führt die Invarianz gegenüber Verschiebungen zur Erhaltung des Gesamtlinearimpulses, gegenüber Drehungen zur Erhaltung des Gesamtdrehimpulses und gegenüber Zeitverschiebungen zur Erhaltung der Gesamtenergie eines abgeschlossenen Systems.

Für Systeme, die nur aus Massenpunkten mit einer Wechselwirkung entsprechend den Newtonschen Axiomen bestehen, ist zwar der Linearimpuls immer eine Erhaltungsgröße, Drehimpuls und Energie aber nur bei Beschränkung auf nur abstandsabhängige Kräfte, die in der Verbindungslinie wirken. Im Fall geschwindigkeits- oder zeitabhängiger Kräfte gilt das nicht. Die magnetische Wechselwirkung bewegter geladener Teilchen erzeugt zum

Beispiel ein Drehmoment, das den Drehimpuls verändert. Bei Reibungskräften, etwa nach der Stokes-Formel, nimmt die Energie mit wachsender Zeit ab. In Wirklichkeit ist das betrachtete System in diesen Fällen nicht abgeschlossen, und es findet ein Übergang von Drehimpuls und Energie auf nicht berücksichtigte Systemteile oder die Umgebung – wie das magnetische Feld oder das widerstehende Medium – statt.

Nach dem Trägheitsprinzip zeichnen sich Koordinatensysteme im absoluten leeren Raum dadurch aus, daß sich in Bezug auf sie wechselwirkungsfreie Körper geradlinig-gleichförmig bewegen. Das ist aber auch der Fall bezüglich Systemen, die sich gegenüber dem absoluten Raum mit konstanter Geschwindigkeit bewegen. Auch in ihnen gilt also das Trägheitsgesetz, sie heißen daher Inertialsysteme. Da außerdem Wechselwirkungen zwischen Körpern nur von ihren relativen Positionen und Geschwindigkeiten abhängen können, führt die Galilei-Transformation:

$$\bar{\boldsymbol{r}}_i = \boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{V}\, t \quad , \quad \bar{t} = t \quad \to \quad \bar{\boldsymbol{v}}_i = \boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{V}$$

auf ein anderes, mit der konstanten Geschwindigkeit $\boldsymbol{V}$ bewegtes, Inertialsystem ebenfalls zu keiner Änderung der Form der Bewegungsgleichungen eines abgeschlossenen Systems :

$$m_i \frac{d^2 \bar{\boldsymbol{r}}_i}{dt^2} = \sum_{j \neq i} \boldsymbol{F}_{ij}(\bar{\boldsymbol{r}}_i - \bar{\boldsymbol{r}}_j, \bar{\boldsymbol{v}}_i - \bar{\boldsymbol{v}}_j, t) \ .$$

Inertialsysteme sind also im Rahmen der Newtonschen Mechanik grundsätzlich ununterscheidbar, und das ursprüngliche Newtonsche Konzept eines absoluten Raumes verliert damit seinen physikalischen Sinn. Die Trennung von Raum und Zeit wird teilweise aufgegeben. In der vierdimensionalen Raumzeit der Ereignisse $(\boldsymbol{r}, t)$ wird der Raum relativiert, während die Zeit absolut bleibt (Galilei-Relativität). Im Gegensatz dazu behalten in der speziellen Relativitätstheorie Einsteins zwar die Inertialsysteme ihre Sonderrolle bei, aber die Zeit verliert ihren absoluten Charakter und wird bei der Lorentz-Transformation in gleicher Weise wie die Raumkoordinaten behandelt.

Die Bewegungsgleichungen eines abgeschlossenen Systems von Massenpunkten sind damit invariant gegenüber beliebigen Verschiebungen $\boldsymbol{a}$, Drehungen mit den Drehwinkeln α, β, γ, Zeitverschiebungen um b und Galilei-Transformationen mit der Geschwindigkeit $\boldsymbol{V}$:

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{r}}_i &= \hat{D}(\alpha, \beta, \gamma)\, \boldsymbol{r}_i + \boldsymbol{a} - \boldsymbol{V}\, t \\ \bar{t} &= t + b \end{aligned}$$

Diese Transformationen bilden eine Gruppe im mathematischen Sinn, nämlich eine Lie-Gruppe mit zehn Gruppenparametern $\boldsymbol{a}, \alpha, \beta, \gamma, b, \boldsymbol{V}$, die Galilei-Gruppe. Nach dem Noether-Theorem führt das zu ebenfalls zehn Bewegungsintegralen $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{L}, E, \boldsymbol{R}_0$. Andererseits sind die Bewegungsgleichungen eines nichtabgeschlossenen Systems im allgemeinen nicht mehr invariant gegenüber den Operationen der Galilei-Gruppe, und die entsprechenden Erhaltungssätze verlieren ihre Gültigkeit. Ob und welche Bewegungsintegrale trotzdem existieren, hängt dann von den speziellen Symmetrien des Systems ab.

Die Newtonsche Mechanik ist begrifflich nicht einfach. Der Kosmologe Hermann Bondi hat gesagt: “Einstein’s contribution has a name for being difficult, but this is quite wrong. Einstein’s contribution is very easy to understand, but unfortunately it rests on the theories of Galilei and Newton which are very difficult to understand.”

2. Integration der Bewegungsgleichungen

Ein allgemeines Verfahren zur Lösung (Integration) der Bewegungsgleichungen eines Systems von Massenpunkten existiert nicht. Das gilt auch für den Sonderfall eines abgeschlossenen ($\boldsymbol{F}_i^{(e)} \equiv \mathbf{0}$) Systems, bei dem die Wechselwirkungen nur von den relativen Abständen abhängen, das sogenannte N-Körper-Problem:

$$m_i \frac{d^2 \boldsymbol{r}_i}{dt^2} = \sum_{j \neq i} f_{ij}(|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|) \, \frac{(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j)}{|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|} \ ,$$

Für $N = 1$ ist seine Lösung trivial und folgt schon aus LEX I:

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{v}_0 \, t \ .$$

Die Lösung des Zweikörperproblems ($N = 2$) ist das erste und wichtigste Beispiel der Newton-Mechanik und bildet einen wesentlichen Teil der “Principia”. Da es sich aber besonders einfach in sphärischen Polarkoordinaten (Kugelkoordinaten) darstellen läßt, wird seine Behandlung auf das nächste Kapitel verschoben.

Das Dreikörperproblem ($N = 3$) war der Anlaß vieler Untersuchungen, die wesentlich zur Entwicklung der theoretischen Mechanik beitrugen. Zu einer analytischen Lösung sind mindestens 16 unabhängige Bewegungsintegrale erforderlich, von denen 10 aus den Symmetrieeigenschaften von Raum und Zeit folgen. Nach Vorarbeiten von Lagrange und Poincaré hat Bruns aber gezeigt, daß im allgemeinen Fall keine weiteren Bewegungsintegrale in analytischer Form existieren. In diesem Sinne ist das Dreikörperproblem also unlösbar.

Wir betrachten jetzt das nichtabgeschlossene Einkörperproblem:

$$m \frac{d^2 \boldsymbol{r}}{dt^2} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}, t) \quad , \quad \boldsymbol{r}(0) = \boldsymbol{r}_0 \ , \ \boldsymbol{v}(0) = \boldsymbol{v}_0 \ .$$

Es handelt sich also um ein System von drei gekoppelten (simultanen) gewöhnlichen Differentialgleichungen 2. Ordnung. Seine Lösung erfordert in der Regel die Separation in drei unabhängige Gleichungen für $x(t), y(t)$ und $z(t)$. Diese ist immer möglich für ein lineares System:

$$m \frac{d^2 \boldsymbol{r}}{dt^2} = \alpha(t) \, \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} + \beta(t) \, \boldsymbol{r} + \boldsymbol{F}(t) \ .$$

Für ein zeitabhängiges homogenes Kraftfeld ($\alpha(t) = \beta(t) \equiv 0$) folgt zum Beispiel durch Integration der Bewegungsgleichung:

$$m\boldsymbol{v} - m\boldsymbol{v}_0 = \int_0^t \boldsymbol{F}(t') \, dt' \ .$$

Die Änderung des Impulses ist gleich dem Kraftstoß. Durch weitere Integration ergibt sich:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{v}_0 \, t + \int_0^t \int_0^{\bar{t}} \boldsymbol{F}(t') \, dt' d\bar{t} \ .$$

Das Problem ist damit auf Quadraturen zurückgeführt und insofern gelöst.

Wenn die Separation möglich ist, führt sie auf drei Bewegungsgleichungen für jeweils ein eindimensionales System, deren erste lautet:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F(x, v, t) \ .$$

Ein generelles Lösungsverfahren für diese allgemeinste Form der gewöhnlichen Differentialgleichung 2. Ordnung gibt es nicht. Wir untersuchen deshalb Sonderfälle.

a) $F = F(t)$

Dieser Fall wurde schon oben behandelt. Es ergibt sich:

$$x = x_0 + v_0\, t + \int_0^t \int_0^{\bar{t}} F(t')\, dt' d\bar{t} \ .$$

b) $F = F(v)$

Die Bewegungsgleichung ist jetzt eine Differentialgleichung 1. Ordnung für $v(t)$:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{m}\, F(v) \ ,$$

die sich durch Trennung der Variablen lösen läßt:

$$\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{F(v)} = \frac{1}{m}\, t \ .$$

Durch Auflösen nach v ergibt sich

$$v = \frac{dx}{dt} = G(v_0, t)$$

und dann durch weitere Integration nach der Zeit

$$x = x_0 + \int_0^t G(v_0, t)\, dt \ .$$

c) $F = F(x)$

Durch Erweitern der Bewegungsgleichung mit v und Integration folgt

$$\frac{m}{2}\, v^2 - \frac{m}{2}\, v_0^2 = \int_{x_0}^{x} F(x)\, dx \ .$$

Die Änderung der kinetischen Energie ist gleich der geleisteten Arbeit. Zu vorgegebenem $F(x)$ gibt es stets eine Potentialfunktion $V(x)$ mit

$$F(x) = -\,\frac{dV(x)}{dx} \ .$$

Damit läßt sich die obige Gleichung schreiben:

$$\frac{m}{2}\, v^2 + V(x) = \frac{m}{2}\, v_0^2 + V(x_0) = E \ .$$

In diesem Fall ist die Summe aus kinetischer und potentieller Energie, die Gesamtenergie, also ein Bewegungsintegral bzw. eine Erhaltungsgröße, obwohl das System nicht abgeschlossen ist. Durch Auflösen nach v folgt

$$v = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}[E - V(x)]}$$

und daraus durch Trennung der Veränderlichen

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{\frac{m}{2}v_0^2 + V(x_0) - V(x)}} = \sqrt{\frac{2}{m}}\,t \ .$$

Das Problem läßt sich also auf Quadraturen zurückführen und ist damit vollständig gelöst.

Auch wenn eine Separation nicht möglich ist, lassen sich für den Fall eines nur vom Ort abhängigen Kraftfeldes $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ Bewegungsintegrale finden. Dazu wird die Bewegungsgleichung skalar mit $\boldsymbol{v}$ erweitert:

$$m\,\boldsymbol{v} \cdot \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \ ,$$

und nach der Zeit integriert:

$$\frac{m}{2}\,v^2 - \frac{m}{2}\,v_0^2 = {}^{(C)}\!\!\int \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} \ .$$

Auch hier ist die Änderung der kinetischen Energie gleich der geleisteten Arbeit, doch hängt diese jetzt im allgemeinen vom Integrationsweg, der Kontur C, ab. Für ein wirbelfreies Feld gilt dagegen:

$$\nabla \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{0} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{F} = -\nabla V(\boldsymbol{r}) \ ,$$

und die Gesamtenergie ist wieder ein Bewegungsintegral:

$$\frac{m}{2}\,v^2 + V(\boldsymbol{r}) = \frac{m}{2}\,v_0^2 + V(\boldsymbol{r}_0) = E \ .$$

Durch vektorielle Erweiterung der Bewegungsgleichung von links mit $\boldsymbol{r}$ ergibt sich:

$$\frac{d}{dt}\,(\boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} \ .$$

Die Änderung des Drehimpulses ist gleich dem Drehmoment der Kraft. Falls das Kraftfeld eine solche Struktur hat, daß einzelne Komponenten des Drehmoments identisch verschwinden, ist die entsprechende Komponente des Drehimpulses

$$\boldsymbol{l} = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$$

ein Bewegungsintegral. Das ist zum Beispiel der Fall bei einer Drehsymmetrie des Feldes um eine Achse, etwa die z-Achse. In diesem Fall ist l_z eine Erhaltungsgröße. Für ein kugelsymmetrisches (Radial-) Feld bleiben sogar alle drei Komponenten des Drehimpulses erhalten.

Falls das Kraftfeld sich als Gradientenfeld eines radialen Potentials darstellen läßt, bleiben sowohl die Energie, als auch wegen

$$\boldsymbol{r} \times \nabla V(r) = \boldsymbol{0}$$

alle Komponenten des Drehimpulses erhalten. Das Problem der Bewegung eines Massenpunktes in einem solchen Kraftfeld ist daher integrabel. Wie im Kapitel B gezeigt werden wird, ist es im wesentlichen identisch mit dem Zweikörperproblem.

3. Systeme von Massenpunkten

Im allgemeinen ist eine vollständige Integration des Systems der Bewegungsgleichungen

$$m_i \frac{d^2 \boldsymbol{r}_i}{dt^2} = \sum_{j \neq i} \boldsymbol{F}_{ij}(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j, \boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_j, t) + \boldsymbol{F}_i^{(e)}(\boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{v}_i, t) \quad , \quad i = 1, \ldots, N$$

nicht möglich, in vielen Fällen aber auch nicht erforderlich, da häufig nur die Gesamtbewegung des Systems von Bedeutung ist und die Details der Bewegung der einzelnen Massenpunkte nicht interessieren. Oft sind sogar die inneren Kräfte des Systems nicht bekannt und doch läßt sich aus den Bewegungsgleichungen eine Reihe wesentlicher Folgerungen ziehen. Durch Summation über die Massenpunkte ergibt sich

$$\frac{d}{dt} \Big(\sum_i m_i \boldsymbol{v}_i \Big) = \sum_{i,j} \boldsymbol{F}_{ij}(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j, \boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_j, t) + \sum_i \boldsymbol{F}_i^{(e)}(\boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{v}_i, t) \ .$$

Für die inneren Kräfte des Systems gilt aber das Reaktionsprinzip:

$$\boldsymbol{F}_{ij} = -\boldsymbol{F}_{ji} \ ,$$

die Summe über diesen Anteil verschwindet also. Es folgt

$$\frac{d\boldsymbol{P}}{dt} = \boldsymbol{F}^{(e)} \ ,$$

wobei $\boldsymbol{F}^{(e)}$ die Summe der äußeren Kräfte ist.

Die vektorielle Erweiterung mit $\boldsymbol{r}_i$ mit nachfolgender Summation über i führt zu

$$\sum_i \boldsymbol{r}_i \times m_i \frac{d\boldsymbol{v}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \Big(\sum_i \boldsymbol{r}_i \times m_i \boldsymbol{v}_i \Big) = \sum_{i,j} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_{ij} + \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i^{(e)} \ ,$$

oder mit Einführung des Drehimpulses $\boldsymbol{L} = \sum_i \boldsymbol{l}_i$ wegen des Reaktionsprinzips zu

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \sum_{i<j} (\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j) \times \boldsymbol{F}_{ij} + \boldsymbol{M}^{(e)} \ .$$

Dabei ist $\boldsymbol{M}^{(e)}$ das Drehmoment der äußeren Kräfte. Fordert man, daß die inneren Kräfte nur vom Abstand der beiden Massenpunkte abhängen und in ihrer Verbindungslinie liegen sollen, so lassen sie sich als Gradienten eines radialen Potentialfeldes $V_{ij}(|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|)$ darstellen:

$$\boldsymbol{F}_{ij} = -\nabla_i V_{ij}(|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|) = -\frac{dV_{ij}}{dr} \frac{(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j)}{|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|} \ .$$

Das Drehmoment der inneren Kräfte verschwindet dann, und es ergibt sich

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{M}^{(e)} \ .$$

Die skalare Erweiterung mit $\boldsymbol{v}_i$ führt nach Summation über die Massenpunkte zu

$$\sum_i m_i \boldsymbol{v}_i \cdot \frac{d\boldsymbol{v}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \Big(\sum_i \frac{m_i}{2} \boldsymbol{v}_i^2 \Big) = \sum_{i,j} \boldsymbol{F}_{ij} \cdot \boldsymbol{v}_i + \sum_i \boldsymbol{F}_i^{(e)} \cdot \boldsymbol{v}_i \ .$$

Die linke Seite stellt die Änderung der kinetischen Energie T dar, der letzte Term auf der rechten Seite die mechanische Leistung $N^{(e)}$ der äußeren Kräfte, und es folgt

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{i<j} (\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_j) \cdot \boldsymbol{F}_{ij} + N^{(e)} \ .$$

Dabei wurde auch hier für die inneren Kräfte das Reaktionsprinzip benutzt. Setzt man wieder voraus, daß diese aus einem Radialpotential $V_{ij}(|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|)$ folgen, so gilt

$$\sum_{i,j} \boldsymbol{F}_{ij} \cdot \boldsymbol{v}_i = -\frac{d}{dt}\,(\sum_{i<j} V_{ij}) \;\; = -\frac{dV}{dt} \ ,$$

und die zeitliche Änderung der Gesamtenergie $E = T + V$ des Systems ist

$$\frac{dE}{dt} = N^{(e)} \ .$$

Ein spezielles System stellt der starre Körper dar. Für ihn sind alle r_{ij} konstant, damit auch alle V_{ij} und die gesamte potentielle Energie V. Bei fehlender Wechselwirkung mit der Umgebung ist dann die kinetische Energie ein Bewegungsintegral.

Die Beziehungen für die Änderung des Gesamtlinearimpulses, des Gesamtdrehimpulses und der Gesamtenergie eines Systems von Massenpunkten stimmen in der Form mit denen für einen einzelnen Massenpunkt in einem äußeren Kraftfeld überein. Zur zweckmäßigen Definition eines solchen Ersatzpunktes wird zunächst das Verhalten von $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{L}$ und E bei einem Wechsel des Bezugssystems untersucht:

$$\boldsymbol{r}_i = \bar{\boldsymbol{r}}_i + \boldsymbol{R} \ .$$

Da die potentielle Energie der Wechselwirkungen innerhalb des Systems nur von den Differenzen von Ortsvektoren abhängt, ändert sie sich bei einer solchen Transformation nicht. Falls $\boldsymbol{R}$ unabhängig von t ist (gleiches Inertialsystem), folgt

$$\boldsymbol{v}_i = \bar{\boldsymbol{v}}_i \ .$$

Mit den $\boldsymbol{v}_i$ bleiben dann auch $\boldsymbol{P}$ und T und wegen der Konstanz von V auch E ungeändert. Für die Drehimpulse gilt aber

$$\boldsymbol{l}_i = \bar{\boldsymbol{l}}_i + \boldsymbol{R} \times \bar{\boldsymbol{p}}_i \ .$$

Im Gegensatz zum Linearimpuls ist also der Drehimpuls in einem bestimmten Inertialsystem nicht eindeutig festgelegt, sondern hängt auch noch vom Bezugspunkt ab (Ausnahme: $\bar{\boldsymbol{p}}_i = \boldsymbol{0}$).

Falls $\boldsymbol{R}$ dagegen eine Funktion der Zeit t ist, gilt mit $\boldsymbol{V} = d\boldsymbol{R}/dt$

$$\boldsymbol{v}_i = \bar{\boldsymbol{v}}_i + \boldsymbol{V} \quad , \quad \boldsymbol{p}_i = \bar{\boldsymbol{p}}_i + m_i \boldsymbol{V} \ .$$

Mit der Gesamtmasse $M = \sum_i m_i$ des Systems ist dann der Gesamtlinearimpuls

$$\boldsymbol{P} = \bar{\boldsymbol{P}} + M\ \boldsymbol{V} \ .$$

Für den Gesamtdrehimpuls folgt entsprechend

$$\boldsymbol{L} = \sum_i m_i(\bar{\boldsymbol{r}}_i + \boldsymbol{R}) \times (\bar{\boldsymbol{v}}_i + \boldsymbol{V}) = \bar{\boldsymbol{L}} + \boldsymbol{R} \times \bar{\boldsymbol{P}} + \boldsymbol{R} \times M\ \boldsymbol{V} + (\sum_i m_i \bar{\boldsymbol{r}}_i) \times \boldsymbol{V}$$

und für die kinetische Energie

$$T = \tfrac{1}{2} \sum_i m_i(\bar{\boldsymbol{v}}_i + \boldsymbol{V})^2 = \bar{T} + \boldsymbol{V} \cdot \bar{\boldsymbol{P}} + \tfrac{1}{2} M\, \boldsymbol{V}^2 \ .$$

Eine besonders einfache Gestalt nehmen diese Beziehungen an, wenn man als Bezugspunkt den Massenmittelpunkt ("center of mass") des Systems – häufig auch inkorrekt als Schwerpunkt ("barycenter") bezeichnet – wählt:

$$M\,\boldsymbol{R} = \sum_i m_i \boldsymbol{r}_i \quad \rightarrow \quad M\,\boldsymbol{V} = \sum_i m_i \boldsymbol{v}_i \ .$$

In diesem System, das aber im allgemeinen kein Inertialsystem mehr ist, gilt dann $\bar{\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{0}$ und $\bar{\boldsymbol{P}} = \boldsymbol{0}$, und es folgt:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P} &= M\,\boldsymbol{V} \\ \boldsymbol{L} &= \bar{\boldsymbol{L}} + \boldsymbol{R} \times M\,\boldsymbol{V} \\ T &= \bar{T} + \tfrac{1}{2} M\,\boldsymbol{V}^2 \ . \end{aligned}$$

Hier sind $\bar{\boldsymbol{L}}$ und $\bar{T}$ der Drehimpuls und die kinetische Energie der Bewegung relativ zum Massenmittelpunkt. Die Bewegung des Systems als Ganzes wird damit zerlegt in einerseits die Bewegung des Massenmittelpunktes und andererseits die Bewegung um den Massenmittelpunkt herum. Der Massenmittelpunkt bewegt sich so, als ob in ihm die Gesamtmasse des Systems vereinigt wäre und an ihm die Resultierende der äußeren Kräfte angriffe.

Die beiden Teilbewegungen sind zwar weitgehend, aber nicht völlig unabhängig voneinander. Das letztere ist der Fall für ein homogenes äußeres Feld, das auf alle Massenpunkte mit einer Kraft wirkt, die proportional zu ihrer Masse ist (lokales Gravitationsfeld). Falls der Gradient des Feldes nicht verschwindet, treten Gezeitenkräfte ("tidal forces") auf, die zur Übertragung von Drehimpuls und Energie der Bahnbewegung des Massenmittelpunktes auf innere Freiheitsgrade (Gezeitenreibung) führen können (Beispiel: Mondbewegung).

Die Zerlegung in die Bewegung des Massenmittelpunktes und die Relativbewegung entspricht einer Zerlegung des ursprünglichen Systems mit $3N$ Freiheitsgraden in zwei (fiktive) Teilsysteme mit jeweils 3 und $3N-3$ Freiheitsgraden und ihrer Beschreibung durch die Koordinaten $\boldsymbol{R}$ des Massenmittelpunktes einerseits und Relativkoordinaten andererseits. Die letzteren können aber nicht durch $\bar{\boldsymbol{r}}_i = \boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{R}$ definiert werden, da sie dann nicht unabhängig wären. Zweckmäßig sind die Jacobi-Koordinaten $\bar{\boldsymbol{r}}_2, \ldots, \bar{\boldsymbol{r}}_N$ mit der Definition:

$$\bar{\boldsymbol{r}}_i = \sum_{j \le i} m_j \boldsymbol{r}_j \Big/ \sum_{j \le i} m_j - \boldsymbol{r}_{i+1} \ .$$

Eine entsprechende Zerlegung gilt auch im Fall des starren Körpers. Von seinen 6 Freiheitsgraden entfallen 3 auf die Translation seines Massenmittelpunktes und 3 auf die Rotation um denselben, doch lassen sich die letzteren nicht als Relativkoordinaten eines weiteren Massenpunktes darstellen. Falls der Körper nicht völlig starr ist, treten weitere Freiheitsgrade für kleine Schwingungen der Massenpunkte um ihre Gleichgewichtslagen auf, die ein wichtiges Teilgebiet der Mechanik bilden, aber hier nicht weiter behandelt werden können.

Für ein abgeschlossenes System von Massenpunkten verschwinden mit $\boldsymbol{F}^{(e)}$ auch $\boldsymbol{M}^{(e)}$ und $N^{(e)}$. Damit werden $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{L}$ und E Erhaltungsgrößen. Der Massenmittelpunkt bewegt sich dann geradlinig-gleichförmig:

$$\boldsymbol{R}(t) = \boldsymbol{R}_0 + \boldsymbol{V}_0\, t = \boldsymbol{R}_0 + \frac{1}{M}\,\boldsymbol{P}\, t \ .$$

Durch Auflösen nach $\boldsymbol{R}_0$ ergibt sich mit

$$\boldsymbol{R}_0 = \boldsymbol{R} - \frac{1}{M}\,\boldsymbol{P}\, t = \sum_i m_i \,(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{v}_i\, t)$$

ein weiteres Bewegungsintegral, aber, da es die Zeit t explizit enthält, keine Erhaltungsgröße. Es wird Schwerpunktintegral genannt. Für ein abgeschlossenes System von Massenpunkten gibt es also, wie schon im ersten Abschnitt erwähnt wurde, 10 Bewegungsintegrale, dabei folgt $\boldsymbol{P}$ aus der Homogenität des leeren Raumes, $\boldsymbol{L}$ aus seiner Isotropie, E aus der Homogenität der Zeit und $\boldsymbol{R}_0$ aus der Galilei-Relativität der Raumzeit.

4. Beschleunigte Bezugssysteme

Bei einer Reihe von Problemen (Bewegung relativ zum Massenmittelpunkt eines Systems, Experimente auf der rotierenden Erde) verwendet man statt eines Inertialsystems $\bar{\mathrm{K}}$ zweckmäßiger ein beliebig bewegtes Bezugssystem K. Durch die gemeinsame Variable t entsteht eine Kopplung zwischen der zeitlichen Änderung eines Vektors $\boldsymbol{u}$ und der Rotation der Achsen des bewegten ("körperfesten") Bezugssystems mit der Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}(t)$ gegenüber den Achsen des ruhenden ("raumfesten") Systems. Die Komponenten von $\boldsymbol{u}$ bezüglich $\bar{\mathrm{K}}$ seien $\bar{u}_x, \bar{u}_y, \bar{u}_z$, bezüglich K u_x, u_y, u_z:

$$\boldsymbol{u} = \bar{u}_x \bar{\boldsymbol{e}}_x + \bar{u}_y \bar{\boldsymbol{e}}_y + \bar{u}_z \bar{\boldsymbol{e}}_z = u_x \boldsymbol{e}_x + u_y \boldsymbol{e}_y + u_z \boldsymbol{e}_z \ .$$

Die zeitliche Änderung von $\boldsymbol{u}$ bezüglich $\bar{\mathrm{K}}$ ist dann

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} = \frac{d\bar{u}_x}{dt}\bar{\boldsymbol{e}}_x + \frac{d\bar{u}_y}{dt}\bar{\boldsymbol{e}}_y + \frac{d\bar{u}_z}{dt}\bar{\boldsymbol{e}}_z$$

und bezüglich K (Definition)

$$\dot{\boldsymbol{u}} = \frac{du_x}{dt}\boldsymbol{e}_x + \frac{du_y}{dt}\boldsymbol{e}_y + \frac{du_z}{dt}\boldsymbol{e}_z \ .$$

Wählt man als z- bzw. $\bar{z}$-Achse die Richtung der momentanen Drehachse $\boldsymbol{\omega}$, so folgt für die Basisvektoren

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_x &= +\cos\omega t\, \bar{\boldsymbol{e}}_x + \sin\omega t\, \bar{\boldsymbol{e}}_y \\
\boldsymbol{e}_y &= -\sin\omega t\, \bar{\boldsymbol{e}}_x + \cos\omega t\, \bar{\boldsymbol{e}}_y \\
\boldsymbol{e}_z &= \bar{\boldsymbol{e}}_z
\end{aligned}$$

und entsprechend für die Komponenten von $\boldsymbol{u}$

$$\begin{aligned}
u_x &= +\cos\omega t\, \bar{u}_x + \sin\omega t\, \bar{u}_y \\
u_y &= -\sin\omega t\, \bar{u}_x + \cos\omega t\, \bar{u}_y \\
u_z &= \bar{u}_z \ .
\end{aligned}$$

Durch Ableitung nach der Zeit und Vergleich ergibt sich der Zusammenhang

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} = \dot{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{u} \ .$$

Für einen Massenpunkt mit dem Ortsvektor $\bar{\boldsymbol{r}}$ in $\bar{\mathrm{K}}$ und $\boldsymbol{r}$ in K gilt

$$\bar{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r} + \boldsymbol{R} \ .$$

Daraus ergibt sich für seine Geschwindigkeit bezüglich $\bar{\mathrm{K}}$ mit $\boldsymbol{V} = d\boldsymbol{R}/dt$

$$\frac{d\bar{\boldsymbol{r}}}{dt} = \dot{\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} + \frac{d\boldsymbol{R}}{dt} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{V} \ .$$

Hier ist $\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}}$ die Geschwindigkeit bezüglich K. Auf entsprechende Weise folgt für die Beschleunigung mit $\boldsymbol{A} = d\boldsymbol{V}/dt = d^2\boldsymbol{R}/dt^2$:

$$\begin{aligned}\frac{d^2\bar{\boldsymbol{r}}}{dt^2} &= \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} + \frac{d\boldsymbol{V}}{dt} \\ &= \dot{\boldsymbol{v}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) + \boldsymbol{A} \\ &= \ddot{\boldsymbol{r}} + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{A} \ .\end{aligned}$$

Da die Transformation $\bar{\boldsymbol{r}} \to \boldsymbol{r}$ keine Galilei-Transformation darstellt, bleibt die Form der Bewegungsgleichung im Inertialsystem $\bar{\mathrm{K}}$:

$$m\frac{d^2\bar{\boldsymbol{r}}}{dt^2} = \boldsymbol{F}^{(i)}$$

nicht erhalten, sondern nimmt in K die folgende Gestalt an:

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} + 2m\,\boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{r}} + m\,\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) + m\,\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{r} + m\,\boldsymbol{A} \ = \boldsymbol{F}^{(i)} \ .$$

Das läßt sich aber auch schreiben als

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}^{(i)} - 2m\,\boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{r}} - m\,\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) - m\,\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{r} - m\,\boldsymbol{A} \ ,$$

und hat dann wieder die Form einer Bewegungsgleichung in einem Inertialsystem, wenn man neben der eingeprägten Kraft $\boldsymbol{F}^{(i)}$, deren Ursache dynamische Wechselwirkungen im System sind, zusätzliche Trägheits- oder Scheinkräfte ("inertial, fictitious forces") einführt, die rein kinematischen Ursprungs sind. Diese sind die Corioliskraft und die Zentrifugalkraft, sowie Kräfte, die auf die Linear- und die Winkelbeschleunigung des Bezugssystems zurückzuführen sind. Die letztere ist nur selten von Interesse.

In einem linear beschleunigten Bezugssystem lautet die Bewegungsgleichung:

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}^{(i)} - m\frac{d^2\boldsymbol{R}}{dt^2} \ .$$

Der letzte Term wirkt wie ein zusätzliches Schwerefeld mit der Schwerebeschleunigung $d^2\boldsymbol{R}/dt^2$. Umgekehrt läßt sich ein homogenes Schwerefeld zumindest lokal durch die Beschleunigung des Bezugssystems wegtransformieren ("Fahrstuhlexperiment"). Diese Äquivalenz war für Einstein der Ausgangspunkt für die allgemeine Relativitätstheorie.

In einem mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ rotierenden Bezugssystem ergibt sich:

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}^{(i)} + 2m\,\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{\omega} + m\,(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) \times \boldsymbol{\omega} \ .$$

Die Zentrifugalkraft ist radial von der Drehachse weg gerichtet. Die Corioliskraft wirkt nur auf Körper, die eine Geschwindigkeit relativ zum rotierenden Bezugssystem haben und steht senkrecht auf dieser. Sie ist unter anderem die Ursache der Wirbelbewegung der Luft um Tiefdruckgebiete herum.

Als Beispiel betrachten wir den freien Fall eines Massenpunktes im rotierenden Bezugssystem. Die Bewegungsgleichungen lauten

$$\begin{aligned} m\ddot{x} - 2m\omega\dot{y} - m\omega^2 x &= 0 \\ m\ddot{y} + 2m\omega\dot{x} - m\omega^2 y &= 0 \\ m\ddot{z} &= -mg \ . \end{aligned}$$

Dazu kommen die Anfangsbedingungen

$$\boldsymbol{r}(0) = (R, 0, h) \quad , \quad \boldsymbol{v}(0) = (0, 0, 0) \ .$$

Für die z-Komponente ergibt sich sofort:

$$z(t) = h - \tfrac{1}{2}\, gt^2 \ .$$

Die Entkoppelung der x- und der y-Komponente erreicht man durch den Ansatz ("gyroskopische Terme")

$$u = x + \imath y \qquad \rightarrow \qquad \dot{u} = \dot{x} + \imath\dot{y} \ .$$

Die Bewegungsgleichung lautet dann

$$\ddot{u} + 2\imath\,\omega\dot{u} - \omega^2 u = 0$$

mit den Anfangsbedingungen

$$u(0) = R \qquad , \qquad \dot{u}(0) = 0 \ .$$

Es handelt sich um eine lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten, die sich durch einen Exponentialansatz lösen läßt:

$$u(t) = \exp(\imath\alpha t) \qquad \rightarrow \qquad \alpha^2 + 2\alpha\omega + \omega^2 = 0 \ .$$

Diese quadratische Gleichung hat die doppelte Wurzel $\alpha_{1,2} = -\omega$, die Lösung ist daher von der Form

$$u(t) = (a + b\,t)\exp(-\imath\omega t) \ .$$

Aus den Anfangsbedingungen folgt dann

$$u(t) = R\,(1 + \imath\omega t)\exp(-\imath\omega t) \ .$$

Die Zerlegung von u in Real- und Imaginärteil liefert

$$\begin{aligned} x(t) &= +R\,(\cos\omega t + \omega t\sin\omega t) \\ y(t) &= -R\,(\sin\omega t - \omega t\cos\omega t) \ . \end{aligned}$$

Das ist die Parameterdarstellung (Parameter t) einer Spirale in der xy-Ebene. Für kurze Fallzeiten $t = \sqrt{2h/g} \ll 1/\omega$ ergibt sich

$$\begin{aligned} x(t) &\approx R\,(1 - \frac{\omega^2 h}{g}) + R\frac{2\omega^2 h}{g} = R\,(1 + \frac{\omega^2 h}{g}) \\ y(t) &\approx -R\omega\,(\frac{2h}{g})^{1/2}(1 - \frac{1}{3}\frac{\omega^2 h}{g}) + R\omega\,(\frac{2h}{g})^{1/2}(1 - \frac{\omega^2 h}{g}) = -\frac{R}{3}\,(\frac{2\omega^2 h}{g})^{3/2} \ . \end{aligned}$$

Die Lotabweichung ist also in x-Richtung von 2. und in y-Richtung von 3. Ordnung in der kleinen Größe $\omega\sqrt{h/g}$.

In diesem Fall ist die Berechnung im Inertialsystem einfacher. Die Bewegung in der xy-Ebene ist kräftefrei, und unter Berücksichtigungaus der Anfangsbedingungen folgt

$$\bar{x}(t) \equiv R \quad , \quad \bar{y}(t) = R\omega t \ .$$

Für die Transformation in das rotierende System gilt

$$\begin{aligned} x(t) &= +\bar{x}(t)\cos\omega t + \bar{y}(t)\sin\omega t \\ y(t) &= -\bar{x}(t)\sin\omega t + \bar{y}(t)\cos\omega t \ . \end{aligned}$$

Durch Einsetzen folgt daraus wieder die obige Lösung.

Prinzipiell sind das ruhende und das rotierende Bezugssystem für die Behandlung eines Problems gleichwertig. Im Einzelfall kann das Arbeiten mit Scheinkräften einfacher sein, wie z.B. bei der Berechnung der parabolischen Oberfläche des Wassers in einem rotierenden Eimer ("Newtons Eimerversuch").

5. Das Prinzip von d'Alembert

Die Bewegungsmöglichkeiten und damit die Zahl der Freiheitsgrade eines Systems von Massenpunkten werden häufig durch einschränkende Bedingungen (Zwangsbedingungen, "constraints") verringert. Wichtige Beispiele sind der starre Körper, bei dem die Abstände der Massenpunkte festliegen, die schiefe Ebene, bei der die Bewegung eines Massenpunktes auf eine Ebene und das sphärische Pendel mit seinem Sonderfall des ebenen Pendels, bei dem sie auf eine Kugel bzw. auf einen Kreis beschränkt ist. In der Newtonschen Mechanik müssen Kräfte (Zwangskräfte, "forces of constraint") für die Einhaltung dieser Bedingungen sorgen. Es handelt sich dabei in der Regel um Idealisierungen elastischer Kräfte zwischen den Massenpunkten des Systems bzw. um deren Extrapolation auf den Fall unendlich großer Elastizitätskonstanten. Bei diesem Übergang gehen Freiheitsgrade des Systems verloren, sie "frieren ein".

Zwei Massenpunkte gleicher Masse m, können sich senkrecht in einem homogenen Schwerefeld der Feldstärke $-g$ bewegen. Zwischen ihnen besteht eine elastische Wechselwirkungskraft

$$F^{(c)} = k\,(r-l)\ ,$$

wobei r ihr momentaner und l der Gleichgewichtsabstand ist.

Das System hat zwei Freiheitsgrade. Die Bewegungsgleichungen sind

$$\begin{aligned} m\frac{d^2z_1}{dt^2} &= -mg + k\,(z_1 - z_2 - l) \\ m\frac{d^2z_2}{dt^2} &= -mg - k\,(z_1 - z_2 - l)\ . \end{aligned}$$

Im Anfangszeitpunkt $t=0$ ruht das System:

$$z_1(0) = h\ ,\ z_2(0) = h - l - \frac{mg}{k}\ ,\ \dot z_1(0) = \dot z_2(0) = 0\ .$$

Durch die Substitution (Jacobi-Koordinaten)

$$u = \tfrac{1}{2}\,(z_1 + z_2) \quad , \quad v = z_1 - z_2$$

wird das System der Bewegungsgleichungen entkoppelt:

$$\begin{aligned} \ddot u &= -g \\ \ddot v &= -2\frac{k}{m}v + 2\frac{k}{m}l\ . \end{aligned}$$

Die Integration unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen liefert

$$\begin{aligned} u(t) &= h - \tfrac{1}{2}\,(l + \frac{mg}{k}) - \tfrac{1}{2}\,g\,t^2 \\ v(t) &= l + \frac{mg}{k}\cos\big(\sqrt{\frac{2k}{m}}t\big)\ . \end{aligned}$$

Für die ursprünglichen Variablen folgt daraus

$$\begin{aligned} z_1(t) = u(t) + \tfrac{1}{2}\,v(t) &= h - \tfrac{1}{2}\,g\,t^2 - \frac{mg}{2k}\big[1 - \cos\big(\sqrt{\frac{2k}{m}}t\big)\big] \\ z_2(t) = u(t) - \tfrac{1}{2}\,v(t) &= h - \tfrac{1}{2}\,g\,t^2 - \frac{mg}{2k}\big[1 + \cos\big(\sqrt{\frac{2k}{m}}t\big)\big] - l\ . \end{aligned}$$

Die beiden Massenpunkte üben aufeinander die Kraft

$$F^{(c)}(t) = k\,(z_1 - z_2 - l) = mg\cos(\sqrt{\frac{2k}{m}}t)$$

aus. Beim Übergang $k \to \infty$ verschwindet ein Freiheitsgrad, und es entsteht:

$$z_1(t) = h - \tfrac{1}{2}\,g\,t^2$$

mit der Zwangsbedingung

$$z_2 = z_1 - l\ .$$

Aus $F^{(c)}(t)$ entsteht die Zwangskraft. Sie hat für $t = 0$ den Wert mg und verschwindet für $t > 0$ im Mittel.

Ein solches Verfahren liefert also zugleich die Größe der Zwangskräfte, ist aber im allgemeinen viel zu kompliziert.

Die Einschränkung der Bewegung eines Systems von N Massenpunkten durch r ($r < 3N$) Zwangsbedingungen verringert die Zahl seiner Freiheitsgrade auf $s = 3N - r$. Für zwei benachbarte Konfigurationen $(\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_N)$ und $(\boldsymbol{r}_1 + d\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_N + d\boldsymbol{r}_N)$, die das System im Verlauf seiner Bewegung zu den Zeitpunkten t und $t + dt$ annimmt, bezeichnet man $(d\boldsymbol{r}_1, \ldots, d\boldsymbol{r}_N)$ als aktuale Verschiebung. Bei einer Umnumerierung der Teilchenkoordinaten:

$$x_k \mathrel{\widehat{=}} x_{3k-2} \ , \ y_k \mathrel{\widehat{=}} x_{3k-1} \ , \ z_k \mathrel{\widehat{=}} x_{3k}$$

führt die Einhaltung der Zwangsbedingungen dann dazu, daß

$$\sum_{i=1}^{3N} a_{ik}\, dx_i + b_k\, dt = 0 \quad , \quad k = 1, \ldots, r \ .$$

Für zwei benachbarte zum gleichen Zeitpunkt mögliche, also mit den Zwangsbedingungen verträgliche, Konfigurationen $(\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_N)$ und $(\boldsymbol{r}_1 + \delta\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_N + \delta\boldsymbol{r}_N)$ bezeichnet man $(\delta\boldsymbol{r}_1, \ldots, \delta\boldsymbol{r}_N)$ als virtuelle Verschiebung. Für sie gilt:

$$\sum_{i=1}^{3N} a_{ik}\, \delta x_i = 0 \quad , \quad k = 1, \ldots, r \ .$$

Zeitunabhängige Zwangsbedingungen heißen skleronom, zeitabhängige rheonom (Beispiel: bewegter Tennisschläger). Die Zwangsbedingungen wurden hier als Differentialformen eingeführt. Falls sie integrabel sind, falls es also eine Funktion $f_k(x_i, t)$ gibt, so daß

$$a_{ik} = \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \quad , \quad b_k = \frac{\partial f_k}{\partial t}$$

ist, nennt man sie holonom, andernfalls nicht-holonom.

Als Beispiel betrachten wir ein Rad, das senkrecht auf der xy-Ebene rollt. Sein Mittelpunkt ist durch die Koordinaten x, y seines Fußpunktes festgelegt, seine Ebene durch den Winkel α, den diese mit der x-Achse bildet. Der Drehwinkel sei φ. Die momentane Geschwindigkeit des Fußpunktes muß senkrecht auf der Richtung der Radachse stehen und den Betrag $R\dot{\varphi}$ haben (Rollbedingung), dann gilt

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -R\,\dot{\varphi}\,\sin\alpha \\ \dot{y} &= +R\,\dot{\varphi}\,\cos\alpha \ . \end{aligned}$$

Die ursprünglichen 4 Freiheitsgrade des Systems werden also eimgeschränkt durch 2 Zwangsbedingungen

$$\begin{aligned} dx + R\sin\alpha\, d\varphi &= 0 \\ dy - R\cos\alpha\, d\varphi &= 0 \ . \end{aligned}$$

Die Annahme, daß diese holonom seien, daß es also Bedingungen

$$\begin{aligned} f_1(x, y, \alpha, \varphi) &= 0 \\ f_2(x, y, \alpha, \varphi) &= 0 \end{aligned}$$

gäbe, aus denen sie durch Differentiation hervorgehen, führt zu einem Widerspruch. Die erste müßte sich dann nämlich schreiben lassen als

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} dx + \frac{\partial f_1}{\partial y} dy + \frac{\partial f_1}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial f_1}{\partial \varphi} d\varphi = 0 \ .$$

Daraus würde folgen

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 1 \ , \ \frac{\partial f_1}{\partial y} = 0 \ , \ \frac{\partial f_1}{\partial \alpha} = 0 \ , \ \frac{\partial f_1}{\partial \varphi} = R\sin\alpha \ .$$

Dann wäre aber

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial\alpha\partial\varphi} = R\cos\alpha \quad , \quad \frac{\partial^2 f_1}{\partial\varphi\partial\alpha} \equiv 0 \ ,$$

was unmöglich ist. Eine analoge Betrachtung zeigt, daß auch die zweite Zwangsbedingung nicht-holonom ist. Das System hat differentiell 2 Freiheitsgrade, global aber 4, denn jedes Quadrupel (x, y, α, φ) kann auf geeigneten Bahnen erreicht werden.

Wegen der Zwangsbedingungen müssen die Bewegungsgleichungen des Systems die Gestalt haben:

$$m_j \frac{d^2\boldsymbol{r}_j}{dt^2} = \boldsymbol{F}_j^{(a)} + \boldsymbol{F}_j^{(c)} \ ,$$

dabei sind die $\boldsymbol{F}_j^{(a)}$ eingeprägte, die $\boldsymbol{F}_j^{(c)}$ Zwangskräfte. Diese Bewegungsgleichungen lassen sich nicht ohne weiteres integrieren, da die Zwangskräfte nicht a priori bekannt sind. Man muß daher versuchen, sie zu eliminieren. Dazu erweitert man die Bewegungsgleichungen skalar mit $\delta\boldsymbol{r}_j$ und summiert sie:

$$\sum_j \left(m_j \frac{d^2\boldsymbol{r}_j}{dt^2} - \boldsymbol{F}_j^{(a)} - \boldsymbol{F}_j^{(c)} \right) \cdot \delta\boldsymbol{r}_j = 0 \ .$$

Die Zwangskräfte sind der Newtonschen Mechanik fremd und können im allgemeinen Fall nicht aus ihr bestimmt werden. Sie werden festgelegt durch ein zusätzliches Postulat, das Prinzip von d'Alembert:

$$\sum_j \boldsymbol{F}^{(c)} \cdot \delta\boldsymbol{r}_j = 0 \ ,$$

oder: Die virtuelle Arbeit der Zwangskräfte verschwindet. Die anschauliche Bedeutung des Prinzips läßt sich am Sonderfall $N=1$ mit holonom-skleronomen Zwangsbedingungen erkennen:

$$\boldsymbol{F}^{(c)} - \delta\boldsymbol{r} \ .$$

Die Zwangskraft steht also senkrecht auf der durch die Zwangsbedingungen festgelegten Fläche oder Kurve, in der sich der Massenpunkt bewegt, ihr Betrag bleibt aber unbestimmt.

Es ergibt sich dann für die virtuelle Arbeit

$$\sum_j \boldsymbol{F}_j^{(c)} \cdot \delta\boldsymbol{r}_j = \sum_j \left(m_j \frac{d^2\boldsymbol{r}_j}{dt^2} - \boldsymbol{F}_j^{(a)} \right) \cdot \delta\boldsymbol{r}_j = 0 \ .$$

Die Zwangskräfte sind damit eliminiert, aber die virtuellen Verschiebungen $\delta\boldsymbol{r}_j$ sind nicht unabhängig voneinander, sondern durch die Zwangsbedingungen verknüpft. Ein allgemeines Verfahren zur Berücksichtigung solcher Nebenbedingungen stellt die Methode der Lagrange-Multiplikatoren dar. Dazu werden die Zwangsbedingungen für die virtuellen Verschiebungen mit noch unbestimmten Faktoren λ_k multipliziert und summiert:

$$\sum_{k=1}^{r} \sum_{i=1}^{3N} \lambda_k \, a_{ik} \, \delta x_i = 0 \ .$$

Da dieser Ausdruck verschwindet, kann er zur virtuellen Arbeit addiert werden.:

$$\sum_{i=1}^{3N} \left(m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} - F_i^{(a)} - \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \, a_{ik} \right) \delta x_i = 0 \ .$$

Von den δx_i sind aber die ersten $3N-r$ frei wählbar, die restlichen r abhängig. Die Multiplikatoren λ_k werden nun so festgelegt, daß die Klammern für $i = 3N-r+1, \ldots, 3N$ verschwinden. Wegen der Unabhängigkeit der δx_i für die verbleibenden i muß das dann für die zugehörigen Klammern ebenfalls gelten, und man erhält für alle $i = 1, \ldots, 3N$ die Lagrange-Gleichungen 1. Art:

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = F_i^{(a)} + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \, a_{ik}$$

mit den Zusatzbedingungen für $k = 1, \ldots, r$

$$\sum_{i=1}^{3N} a_{ik} \, \dot{x}_i + b_k = 0 \; .$$

Das ist insgesamt ein System von $3N+r$ Gleichungen für ebenfalls $3N+r$ unbekannte Funktionen $x_i(t), \lambda_k(t)$. Die Bedeutung der letzten Terme in der Bewegungsgleichung

$$\sum_{k=1}^{r} \lambda_k \, a_{ik} = F_i^{(c)}$$

ist offensichtlich die von Zwangskräften, die damit durch die Zwangsbedingungen ausgedrückt werden.

Für eine schiefe Ebene mit dem Neigungswinkel α läßt sich die Zwangsbedingung schreiben

$$\sin\alpha \, x + \cos\alpha \, z - h \, \cos\alpha = 0 \; .$$

Daraus folgt die Differentialform

$$\sin\alpha \, dx + \cos\alpha \, dz = 0$$

und als Lagrange-Gleichungen 1. Art

$$\begin{aligned} m\ddot{x} \; - \; 0 \; - \; \lambda \sin\alpha \; &= \; 0 \\ m\ddot{y} \; - \; 0 \quad - \quad 0 \quad &= \; 0 \\ m\ddot{z} + mg \; - \; \lambda \cos\alpha \; &= \; 0 \; . \end{aligned}$$

Als Anfangsbedingungen werden gewählt

$$x(0) = y(0) = 0 \; , \; \dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0 \; , \; z(0) = h \; , \; \dot{z}(0) = 0 \; .$$

Mit dem Ansatz eines zeitlich konstanten λ liefert die Integration:

$$\begin{aligned} x(t) \; &= \; \frac{\lambda}{2m} \sin\alpha \, t^2 \\ y(t) \; &\equiv \; 0 \\ z(t) \; &= \; h - \tfrac{1}{2} \, (g - \frac{\lambda}{m} \cos\alpha) \, t^2 \; . \end{aligned}$$

Einsetzen in die Zwangsbedingung führt zu

$$\lambda = mg \, \cos\alpha$$

und nach Einsetzen in die Bahngleichungen zu

$$\begin{aligned} x(t) \; &= \; \tfrac{1}{2} \, g \, \sin\alpha \cos\alpha \, t^2 \\ y(t) \; &\equiv \; 0 \\ z(t) \; &= \; h - \tfrac{1}{2} \, g \, \sin^2\!\alpha \, t^2 \; . \end{aligned}$$

Es handelt sich also um eine Fallbewegung mit verringerter Schwerebeschleunigung $g \sin\alpha$ und der Zwangskraft $mg\cos\alpha$. Das gleiche Resultat erhält man auch (schneller) in der üblichen Weise durch Komponentenzerlegung.

Daß die virtuelle Arbeit der Zwangskräfte verschwindet, bedeutet nicht, daß das auch für die aktuale Arbeit gilt. Bei zeitabhängigen Zwangsbedingungen wird im allgemeinen Arbeit am oder vom System geleistet (Beispiel: Tennisschläger).

Wenn die im vorigen Beispiel betrachtete schiefe Ebene sich horizontal mit der konstanten Beschleunigung a bewegt, lautet die Zwangsbedingung

$$\sin\alpha\,(x - \tfrac{1}{2}\,a\,t^2) + \cos\alpha\,z - h\cos\alpha = 0 \ ,$$

oder in differentieller Form

$$\sin\alpha\,dx + \cos\alpha\,dz - a\,t\,\sin\alpha\,dt = 0 \ .$$

Die Lagrange-Gleichungen 1. Art bleiben unverändert. Auch hier führt der Ansatz eines zeitlich konstanten λ zum Erfolg. Einsetzen von $x(t)$ und $z(t)$ in die Zwangsbedingung ergibt

$$\lambda = mg\,\cos\alpha + ma\,\sin\alpha \ ,$$

und bei den gleichen Anfangsbedingungen wie oben

$$\begin{aligned} x(t) &= \tfrac{1}{2}\,(g\,\cos\alpha + a\,\sin\alpha)\sin\alpha\,t^2 \\ y(t) &\equiv 0 \\ z(t) &= h - \tfrac{1}{2}\,(g\,\sin\alpha - a\,\sin\alpha)\sin\alpha\,t^2 \ . \end{aligned}$$

Die Gesamtenergie ist

$$E = \frac{m}{2}\,(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + mg\,z = \frac{m}{2}\,(a\,\sin\alpha + g\,\cos\alpha)\,a\,\sin\alpha\,t^2 + mg\,h \ ,$$

also für $a \neq 0$ zeitabhängig.

Im allgemeinen Fall wird die Behandlung des Gleichungssystems dadurch schwierig, daß die λ_k zunächst unbekannte Funktionen der Zeit sind.

Für das ebene Pendel lauten die Zwangsbedingungen

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 - l^2 = 0 \qquad &\rightarrow \qquad x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0 \\ y \equiv 0 \qquad &\rightarrow \qquad dy = 0 \ . \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= \quad 0 \;\; + 2\lambda_1\,x \\ m\ddot{y} &= \quad 0 \;\; + \lambda_2 \\ m\ddot{z} &= -mg + 2\lambda_1\,z \ . \end{aligned}$$

Aus der zweiten Gleichung folgt in Verbindung mit der zweiten Zwangsbedingung

$$\lambda_2 = 0 \quad , \quad y = y(0) + \dot{y}(0)\,t \equiv 0 \ .$$

Der Ansatz eines konstanten λ_1 führt nicht zum Erfolg. Erweitern der ersten Gleichung mit z, der dritten mit x und Addition ergibt

$$z\ddot{x} - x\ddot{z} = g\,x$$

Damit ist λ_1 eliminiert. Für die untere Kreishälfte führt die Ersetzung von z durch x zu

$$\begin{aligned} z &= -\,(l^2 - x^2)^{1/2} \\ \dot{z} &= x\,\dot{x}(l^2 - x^2)^{-1/2} \\ \ddot{z} &= -\,(x^3\ddot{x} - l^2\dot{x}^2 - l^2 x\ddot{x})\,(l^2 - x^2)^{-3/2} \ . \end{aligned}$$

Für $x(t)$ erhält man dann die Differentialgleichung 2. Ordnung

$$l^2(l^2 - x^2)\,\ddot{x} + l^2\dot{x}^2 x - g\,(l^2 - x^2)^{3/2} x = 0 \ .$$

Durch den Variablenwechsel $x(t) = l\,\sin\varphi(t)$ nimmt sie die wesentlich einfachere Gestalt an:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\,\sin\varphi = 0 \ .$$

Diese Gleichung wird später weiterbehandelt werden.

Obwohl sich durch r Zwangsbedingungen die Zahl der Freiheitsgrade eines Systems um r verringert, wächst das zugehörige Gleichungssystem um r Gleichungen. Bei holonomen Zwangsbedingungen kann man aber durch eine Punkttransformation $x_i \to q_k(x_i, t)$ mit

$$q_{3N-r+k} = f_k(x_1, \ldots, x_{3N}, t) \quad , \quad k = 1, \ldots, r$$

erreichen, daß diese im neuen Koordinatensystem die Gestalt annehmen

$$q_k \equiv 0 \quad , \quad k = 3N-r+1, \ldots, 3N \ .$$

Damit ist nur noch ein System von $s = 3N-r$ Bewegungsgleichungen ohne Nebenbedingungen zu lösen.

Für das Problem der schiefen Ebene führt die Transformation

$$\begin{aligned} u &= x \cos\alpha - z \sin\alpha \\ v &= y \\ w &= x \sin\alpha + z \cos\alpha - h \cos\alpha \end{aligned}$$

zu einem Koordinatensystem, in dem die Zwangsbedingung die Gestalt

$$w \equiv 0$$

annimmt. Die Transformation der Bewegungsgleichungen auf die neuen Koordinaten ergibt

$$\begin{aligned} m\ddot{u} - mg \sin\alpha &= 0 \\ m\ddot{v} &= 0 \\ m\ddot{w} + mg \cos\alpha - \lambda &= 0 \end{aligned}$$

mit den Anfangsbedingungen

$$u(0) = -h \sin\alpha \ , \ v(0) = 0 \ , \ w(0) = 0 \ , \ \dot{u}(0) = \dot{v}(0) = \dot{w}(0) = 0 \ .$$

Die beiden ersten Gleichungen enthalten weder Zwangskräfte noch die Variable w. Ihre Integration ergibt nach Einsetzen der Anfangsbedingungen:

$$\begin{aligned} u(t) &= -h \sin\alpha + \tfrac{1}{2}\, mg \sin\alpha\, t^2 \\ v(t) &\equiv 0 \ . \end{aligned}$$

Die dritte, verbunden mit der Zwangsbedingung, liefert die Zwangskraft

$$\lambda = mg \cos\alpha \ ,$$

in Übereinstimmung mit der früheren Rechnung.

Wenn die Zwangsbedingungen, wie im vorigen Beispiel, linear in x, y, z, t sind, lassen sich die erforderlichen Transformationen auf Drehungen, Verschiebungen und Galilei-Transformationen des Koordinatensystems zurückführen. Dabei sind die Bewegungsgleichungen forminvariant. Bei nichtlinearen Zwangsbedingungen gilt das nicht mehr.

Für das ebene Pendel kann man die erste Zwangsbedingung durch die Transformation auf Zylinderkoordinaten r, y, φ auf die gewünschte Form

$$r - l = 0 \quad \to \quad dr = 0$$

bringen. Die Umrechnung der Ableitungen führt wegen

$$\begin{aligned} x &= r \cos\varphi \\ \dot{x} &= \dot{r} \cos\varphi - r\dot{\varphi} \sin\varphi \\ \ddot{x} &= \ddot{r} \cos\varphi - 2\,\dot{r}\dot{\varphi} \sin\varphi - r\ddot{\varphi} \sin\varphi - r\dot{\varphi}^2 \cos\varphi \end{aligned}$$

und analog für y: $\quad \ddot{y} = \ddot{r} \sin\varphi + 2\,\dot{r}\dot{\varphi} \cos\varphi + r\ddot{\varphi} \cos\varphi + r\dot{\varphi}^2 \sin\varphi$

bei Auflösung nach $\ddot{r}$ und $\ddot{\varphi}$ zu den Bewegungsgleichungen für einen Massenpunkt in einem Kraftfeld:

$$\begin{aligned} m\ddot{r} - mr\dot{\varphi}^2 - F_r &= 0 \\ m\ddot{y} - F_y &= 0 \\ mr\ddot{\varphi} + 2m\dot{r}\dot{\varphi} - F_\varphi &= 0 \ . \end{aligned}$$

Sie haben nicht mehr die gleiche Form wie in kartesischen Koordinaten. Im vorliegenden Fall gilt für die eingeprägte Kraft

$$F_r^{(a)} = +mg\,\cos\varphi \ , \ F_y^{(a)} = 0 \ , \ F_\varphi^{(a)} = -mg\,\sin\varphi \ .$$

Unter Berücksichtigung der Zwangsbedingung folgt dann

$$\begin{aligned} -ml\dot{\varphi}^2 - mg\,\cos\varphi - \lambda &= 0 \\ m\ddot{y} &= 0 \\ ml\ddot{\varphi} + mg\,\sin\varphi &= 0 \ . \end{aligned}$$

Hier enthalten die beiden letzten Gleichungen weder λ noch die Variable r. Die Zwangskraft ergibt sich aus der ersten unter Benutzung des Energieintegrals $E = -mgl\,\cos\varphi_m$, wobei φ_m den maximalen Auslenkungswinkel bedeutet, zu

$$\lambda = -mg\,\cos\varphi - ml\dot{\varphi}^2 = -mg\,(3\cos\varphi - 2\cos\varphi_m) \ .$$

Sie ist wegen der Zeitabhängigkeit von φ selbst eine Funktion von t.

Wenn die Zwangsbedingungen von der Zeit explizit abhängen, muß auch die Punkttransformation auf die neuen Koordinaten die Zeit enthalten. Daraus ergeben sich bedeutsame Konsequenzen für die aktuale Arbeit der Zwangskräfte und die Energie im transformierten Bezugssystem.

Die Schwingungsebene des ebenen Pendels möge sich gegenüber einem Inertialsystem $\bar{\mathrm{K}}$ mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω drehen. Dann lautet die Zwangsbedingung

$$\bar{y} = \bar{x}\tan(\omega t) \quad \to \quad -\bar{x}\sin(\omega t) + \bar{y}\cos(\omega t) = 0 \ .$$

Für kleine Auslenkungen des Pendels aus der Ruhelage kann man seine Bewegung durch die eines linearen harmonischen Oszillators mit der Eigenfrequenz $\omega_0^2 = g/l$ annähern. Die Bewegungsgleichungen lauten dann

$$\begin{aligned} m\ddot{\bar{x}} &= -m\omega_0^2\,\bar{x} - \lambda\sin(\omega t) \\ m\ddot{\bar{y}} &= -m\omega_0^2\,\bar{y} + \lambda\cos(\omega t) \ . \end{aligned}$$

Sie lassen sich nicht ohne weiteres integrieren. Geht man dagegen auf das mitrotierende Koordinatensystem K über, so nimmt die Zwangsbedingung die Form

$$y \equiv 0$$

an, und die Bewegungsgleichungen lauten

$$\begin{aligned} m\,\ddot{x} - 2m\omega\,\dot{y} - m\omega^2 x &= -m\omega_0^2\,x \\ m\,\ddot{y} + 2m\omega\,\dot{x} - m\omega^2 y &= -m\omega_0^2\,y + \lambda \end{aligned}$$

an. Durch Einsetzen der Zwangsbedingung ergibt sich

$$\begin{aligned} m\,\ddot{x} + m(\omega_0^2 - \omega^2)\,x &= 0 \\ 2m\omega\,\dot{x} &= \lambda \ . \end{aligned}$$

Die Zwangskraft ist also bis aufs Vorzeichen gleich der Corioliskraft. Mit

$$x(0) = R \ , \ \dot{x}(0) = y(0) = \dot{y}(0) = 0$$

und der Abkürzung $\bar{\omega}^2 = \omega_0^2 - \omega^2$ folgt aus der ersten Gleichung

$$x(t) = R\cos(\bar{\omega}t) \quad \to \quad \dot{x} = -R\bar{\omega}\sin(\bar{\omega}t)$$

und damit als Zwangskraft

$$\lambda(t) = -\,2mR\omega\bar{\omega}\sin(\bar{\omega}t) \; .$$

Die Rücktransformation auf das Inertialsystem ergibt

$$\begin{aligned}
\bar{x}(t) &= R\cos(\bar{\omega}t)\cos(\omega t) \\
\bar{y}(t) &= R\cos(\bar{\omega}t)\sin(\omega t) \\
\lambda(t) &= -\,2mR\omega\bar{\omega}\sin(\bar{\omega}t) \; .
\end{aligned}$$

Durch Einsetzen zeigt sich, daß damit das ursprüngliche Gleichungssystem erfüllt wird. Die Arbeit der Zwangskraft in der Zeiteinheit ist

$$\begin{aligned}
\bar{N} &= -\,\lambda(t)\sin(\omega t)\,\dot{x} + \lambda(t)\cos(\omega t)\,\dot{y} \\
&= -\,mR^2\omega^2\bar{\omega}\sin(2\bar{\omega}t) \; .
\end{aligned}$$

Die Gesamtenergie des Massenpunktes ist aber

$$\bar{E} = \frac{m}{2}(\dot{\bar{x}}^2 + \dot{\bar{y}}^2) + \frac{m\omega_0^2}{2}(\bar{x}^2 + \bar{y}^2) = \frac{m}{2}R^2[\bar{\omega}^2 + 2\omega^2\cos^2(\bar{\omega}t)] \; ,$$

und wie erwartet ergibt sich

$$\bar{N} = \frac{d\bar{E}}{dt} \; .$$

Im mitrotierenden System ist dagegen die Arbeit der Zwangskraft in der Zeiteinheit

$$N = 0\,\dot{x} + \lambda(t)\,\dot{y} \equiv 0 \; .$$

Dem entspricht, daß die Hamilton-Funktion

$$H = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{m\bar{\omega}^2}{2}(x^2 + y^2) \equiv \frac{m}{2}R^2\bar{\omega}^2$$

eine Erhaltungsgröße ist, die aber nicht mit der Energie übereinstimmt.

Im allgemeinen Fall müssen sich bei s verbleibenden Freiheitsgraden die N Ortsvektoren $\boldsymbol{r}_j$ durch s neue Koordinaten q_i ausdrücken lassen:

$$\boldsymbol{r}_j = \boldsymbol{r}_j(q_1, \ldots, q_s, t) \quad , \quad j = 1, \ldots, N \; .$$

Aus dieser im allgemeinen nichtlinearen Punkttransformation der Koordinaten folgt eine lineare Transformation der Geschwindigkeiten:

$$\boldsymbol{v}_j = \frac{d\boldsymbol{r}_j}{dt} = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial \boldsymbol{r}_j}{\partial q_i}\,\dot{q}_i + \frac{\partial \boldsymbol{r}_j}{\partial t} \; .$$

Daraus ergibt sich die später noch benötigte Beziehung

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}_j}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \boldsymbol{r}_j}{\partial q_i} \; ,$$

sowie für die virtuellen Verschiebungen:

$$\delta\boldsymbol{r}_j = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial \boldsymbol{r}_j}{\partial q_i}\,\delta q_i \; .$$

Zur Transformation der Bewegungsgleichungen auf das System der q_i geht man aus vom Prinzip der virtuellen Arbeit:

$$\sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{F}_j^{(c)} \cdot \delta\boldsymbol{r}_j = \sum_{j=1}^{N} \left(m_j \frac{d^2\boldsymbol{r}_j}{dt^2} - \boldsymbol{F}_j^{(a)} \right) \cdot \delta\boldsymbol{r}_j = 0 \; .$$

Die Umrechnung des letzten Terms in der Klammer führt zu

$$\sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{F}_j^{(a)} \cdot \delta \boldsymbol{r}_j = \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{s} \boldsymbol{F}_j^{(a)} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_j}{\partial q_i} \, \delta q_i = \sum_{i=1}^{s} Q_i \, \delta q_i$$

mit der Definition der generalisierten Kraft:

$$Q_i = \sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{F}_j^{(a)} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_j}{\partial q_i} \; .$$

Im allgemeinen Fall hat Q_i nicht mehr die Dimension einer Kraft, sondern beispielsweise (falls q_i ein Winkel ist) die eines Drehmoments.

Die Umrechnung des ersten Terms in der Klammer ergibt

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{N} m_j \frac{d^2 \boldsymbol{r}_j}{dt^2} \cdot \delta \boldsymbol{r}_j &= \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{s} m_j \frac{d^2 \boldsymbol{r}_j}{dt^2} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_j}{\partial q_i} \, \delta q_i \\
&= \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{N} \left[\frac{d}{dt} \Big(m_j \frac{d \boldsymbol{r}_j}{dt} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_j}{\partial q_i} \Big) - m_j \frac{d \boldsymbol{r}_j}{dt} \cdot \frac{d}{dt} \Big(\frac{\partial \boldsymbol{r}_j}{\partial q_i} \Big) \right] \delta q_i \; .
\end{aligned}$$

Wegen der Vertauschbarkeit der Reihenfolge von Ableitungen ist aber

$$\frac{d}{dt} \Big(\frac{\partial \boldsymbol{r}_j}{\partial q_i} \Big) = \frac{\partial}{\partial q_i} \Big(\frac{d \boldsymbol{r}_j}{dt} \Big) = \frac{\partial \boldsymbol{v}_j}{\partial q_i} \; .$$

Einsetzen ergibt für die obige Summe

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{N} m_j \frac{d^2 \boldsymbol{r}_j}{dt^2} \cdot \delta \boldsymbol{r}_j &= \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{N} \left[\frac{d}{dt} \Big(m_j \boldsymbol{v}_j \cdot \frac{\partial \boldsymbol{v}_j}{\partial \dot{q}_i} \Big) - m_j \boldsymbol{v}_j \cdot \frac{\partial \boldsymbol{v}_j}{\partial q_i} \right] \delta q_i \\
&= \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{N} \left\{ \frac{d}{dt} \Big[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \Big(\frac{1}{2} m_j \boldsymbol{v}_j^2 \Big) \Big] - \frac{\partial}{\partial q_i} \Big(\frac{1}{2} m_j \boldsymbol{v}_j^2 \Big) \right\} \delta q_i \\
&= \sum_{i=1}^{s} \left[\frac{d}{dt} \Big(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \Big) - \frac{\partial T}{\partial q_i} \right] \delta q_i \; .
\end{aligned}$$

Aus dem Prinzip der virtuellen Arbeit folgt dann wegen der Unabhängigkeit der δq_i:

$$\frac{d}{dt} \Big(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \Big) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \quad , \quad i = 1, \ldots, s \; .$$

Für die neuen Variablen ist die Zahl der Bewegungsgleichungen also gleich der Zahl $s = 3N - r$ der Freiheitsgrade. Es treten keine zusätzlichen Zwangsbedingungen mehr auf. Da die kinetische Energie T als physikalische Größe nicht vom Koordinatensystem abhängt, ist die linke Seite dieser Gleichung invariant gegenüber einem Wechsel der Variablen. Beschränkt man sich außerdem auf die Betrachtung von Potentialkräften:

$$Q_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i} \; ,$$

mit einer potentiellen Energie $V(q_1, \ldots, q_s, t)$, so gilt das auch für die rechte Seite. Mit der Definition der Lagrange-Funktion L für ein System von Massenpunkten:

$$L(q_i, \dot{q}_i, t) = T(q_i, \dot{q}_i, t) - V(q_i, t)$$

erhält man dann als Bewegungsgleichungen die Lagrange-Gleichungen 2. Art:

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\Big) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad , \quad i = 1, \dots s \; .$$

Sie sind invariant gegenüber beliebigen Punkttransformationen.

Für das ebene Pendel ist die Zahl der Freiheitsgrade $s = 1$. Benutzt man als Koordinate den Winkel φ gegen die Vertikale, so gilt für die kinetische Energie T:

$$T = \frac{m}{2}\,(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) = \frac{m}{2}\,l^2\dot{\varphi}^2 \; .$$

Die potentielle Energie ist

$$V = mgz = -\,mg\,l\,\cos\varphi \; .$$

Damit wird die Lagrange-Funktion

$$L(\varphi, \dot{\varphi}) = \frac{m}{2}\,l^2\dot{\varphi}^2 + mg\,l\,\cos\varphi \; .$$

Die Lagrange-Gleichung lautet nach Kürzen durch ml^2 wie oben:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\,\sin\varphi = 0 \; .$$

Es handelt sich also um eine nichtlineare Differentialgleichung 2. Ordnung. Wir betrachten zunächst den linearen Grenzfall $|\varphi| \ll 1$. Dann gilt

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\,\varphi = 0 \; .$$

Das ist die Bewegungsgleichung eines harmonischen Oszillators mit der Eigenfrequenz $\omega_0 = (g/l)^{1/2}$. Mit der Anfangsbedingung $\varphi(0) = 0$ und dem Winkel φ_m der maximalen Auslenkung ist ihre Lösung

$$\varphi(t) = \varphi_m\,\sin\Big(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t\Big) \; .$$

Ein mechanisches System wird als linear bezeichnet, wenn seine Bewegungsgleichungen ein lineares System von Differentialgleichungen bilden. In diesem Fall sind die Kräfte lineare Funktionen der $q_i, \dot{q}_i$; falls es sich um Potentialkräfte handelt, ist das Potential eine quadratische Form in den q_i. Die Bewegungsgleichungen linearer Systeme sind integrabel. Für eindimensionale Systeme $(s = 1)$ ist der Prototyp eines linearen Systems der harmonische Oszillator.

Für kleine Auslenkungen ist das ebene Pendel näherungsweise ein lineares System. Im allgemeinen Fall folgt zunächst durch Integration der Bewegungsgleichung

$$\frac{m}{2}\,l^2\dot{\varphi}^2 - mg\,l\,\cos\varphi = E \; .$$

Die Gesamtenergie ist also ein Bewegungsintegral. Je nach seinem Wert ergeben sich drei Bewegungstypen (Fig. A1):

a) $E < mgl \quad \rightarrow$ Oszillation mit der Amplitude φ_m

b) $E = mgl \quad \rightarrow$ Grenzbewegung bis $\varphi_m = \pm\pi$

c) $E > mgl \quad \rightarrow$ Rotation

Im Fall a) ist $E = -mg\,l\,\cos\varphi_m$. Durch Trennung der Variablen ergibt sich

$$\int_0^{\varphi} [\cos\varphi - \cos\varphi_m]^{-1/2}\,d\varphi = \sqrt{2\,\frac{g}{l}}\,t \; .$$

Mit dem Additionstheorem des Kosinus folgt durch die Substitution $\sin\varphi/2 = \sin\psi\,\sin\varphi_m/2$

$$\int_0^{\psi} [1 - \sin^2\frac{\varphi_m}{2}\,\sin^2\psi]^{-1/2}\,d\psi = \sqrt{\frac{g}{l}}\,t \; .$$

Auf der linken Seite steht ein elliptisches Integral 1. Gattung in der Normalform:

$$F(\psi\,|\,\sin^2\frac{\varphi_m}{2}) = \sqrt{\frac{g}{l}}\,t\ .$$

Durch Auflösen nach $\varphi(t)$ ergibt sich

$$\psi = \mathrm{am}\,(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t\,|\,\sin^2\frac{\varphi_m}{2}) \quad\rightarrow\quad \varphi(t) = 2\,\arcsin\,[\sin\frac{\varphi_m}{2}\,\mathrm{sn}\,(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t\,|\,\sin^2\frac{\varphi_m}{2})]\ .$$

Für die Schwingungsdauer T folgt aus dem obigen Integral

$$\int_0^{\pi/2}[1-\sin^2\frac{\varphi_m}{2}\sin^2\psi]^{-1/2}\,d\psi = \sqrt{\frac{g}{l}}\,\frac{T}{4} \quad\rightarrow\quad T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\,\mathrm{K}\,(\sin^2\frac{\varphi_m}{2})\ .$$

Dabei ist K ein vollständiges elliptisches Integral 1. Gattung in der Normalform.

Für kleine k gilt die Reihenentwicklung (siehe Abramowitz-Stegun)

$$\mathrm{K}(k^2) = \frac{\pi}{2}\,(\,1+\frac{1}{4}\,k^2+\frac{9}{64}\,k^4+\ldots)$$

und damit für die Schwingungsdauer

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,(1+\frac{1}{4}\,\sin^2\frac{\varphi_m}{2}+\ldots)\ .$$

Für kleine $|\varphi_m|$ hängt sie also nicht von der Auslenkung φ_m ab (Isochronie des mathematischen Pendels).

Im Fall b) läßt sich das Integral über φ durch elementare Funktionen ausdrücken:

$$\int_0^{\varphi}[1+\cos\varphi]^{-1/2}\,d\varphi \;=\; \sqrt{2}\,\ln\big[\tan\big(\frac{\varphi+\pi}{4}\big)\big] \;=\; \sqrt{2\,\frac{g}{l}}\,t$$

$$\rightarrow\quad \varphi(t) \;=\; 4\,\arctan\big[\exp\big(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t\big)\big]-\pi\ .$$

Die Grenzlage $\varphi=\pi$ wird erst für $t\rightarrow\infty$ erreicht.

Im Fall c) gibt es keine maximale Auslenkung φ_m, und die Energie E wird zweckmäßig durch die Geschwindigkeit v_0 im tiefsten Punkt der Bahn ausgedrückt: $E = mv_0^2/2$. Damit ergibt sich:

$$\int_0^{\varphi}[\cos\varphi+\big(\frac{v_0^2}{2gl}-1\big)]^{-1/2}\,d\varphi = \sqrt{2\,\frac{g}{l}}\,t$$

und wegen $\cos\varphi = 1-2\sin^2\frac{\varphi}{2} = 1-2\sin^2\psi$:

$$\int_0^{\varphi}[1-\big(\frac{4gl}{v_0^2}\big)\sin^2\psi]^{-1/2}\,d\varphi = F\big(\frac{\varphi}{2}\,|\,\frac{4gl}{v_0^2}\big) = \frac{v_0}{2l}\,t\ .$$

Auf der linken Seite steht wieder ein elliptisches Integral. Die Auflösung ergibt wie oben:

$$\varphi(t) = 2\,\mathrm{am}\big(\frac{v_0}{2l}\,t\,|\,\frac{4gl}{v_0^2}\big)\ .$$

Für die Rotationsperiode T folgt daraus:

$$\frac{v_0}{2l}\,\frac{T}{2} = \mathrm{K}\big(\frac{4gl}{v_0^2}\big) \quad\rightarrow\quad T = \frac{2l}{v_0}\,\mathrm{K}\big(\frac{4gl}{v_0^2}\big)\ .$$

Durch Einsetzen der Entwicklung von K nach Potenzen von $4gl/v_0^2$ erhält man:

$$T = \frac{2\pi l}{v_0}\,(1+\frac{1}{4}\,\frac{4gl}{v_0^2}+\ldots)\ ,$$

was für sehr große v_0 erwartungsgemäß in $2\pi l/v_0$ übergeht.

Das freie Pendel stellt ein nichtlineares, aber integrables System dar. Bei Berücksichtigung von Reibungskräften und einer äußeren Anregung hat die Bewegungsgleichung die Gestalt:

$$\ddot{\varphi}+\alpha\dot{\varphi}+\frac{g}{l}\,\sin\varphi = f(t)\ .$$

Die Energie bleibt dann nicht mehr erhalten, und es handelt sich um ein nichtlineares, nichtintegrables System, das für bestimmte Bereiche seiner Parameter ein chaotisches Verhalten zeigt.

Wenn nicht alle Kräfte aus einem Potentialfeld hergeleitet werden können, wie zum Beispiel Reibungskräfte, haben die Lagrange-Gleichungen 2. Art die Gestalt:

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\Big) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \bar{Q}_i \quad , \quad i = 1, \ldots s \ .$$

Dabei sind die $\bar{Q}_i$ diese zusätzlichen Kräfte. Nicht-holonome Zwangsbedingungen lassen sich nicht durch Wahl eines passenden Koordinatensystems berücksichtigen. In diesem Fall gilt:

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\Big) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \bar{Q}_i + \sum_{k=1}^{\bar{r}} \lambda_k \, \bar{a}_{ik} \quad , \quad i = 1, \ldots, s$$

$$\sum_{i=1}^{s} \bar{a}_{ik} \, \dot{q}_i + \bar{b}_k = 0 \quad , \quad k = 1, \ldots, \bar{r} \ ,$$

wobei $\bar{r}$ die Anzahl nicht-holonomer Zwangsbedingungen bedeutet.

Die Lagrange-Gleichungen 2. Art, im folgenden meist kurz Lagrange-Gleichungen genannt, in dieser allgemeinsten Form wurden hier für ein System von Massenpunkten aus den Newtonschen Axiomen einschließlich des Prinzips von d'Alembert hergeleitet. Umgekehrt kann man aus ihnen die Newtonschen Bewegungsgleichungen ableiten. Beide haben also den gleichen Gültigkeitsbereich.

B. LAGRANGE-MECHANIK

Das Newtonsche Modell für den Aufbau der Welt – Massenpunkte, die sich im unendlich ausgedehnten homogenen und isotropen absoluten Raum und der homogenen absoluten Zeit bewegen und zwischen denen momentan wirkende Fernkräfte bestehen – ist zu speziell. Schon im Fall, daß Zwangsbedingungen existieren, insbesondere für starre Körper, muß es durch das Prinzip von d'Alembert ergänzt werden und ist auch dann nicht ohne weiteres auf kontinuierliche Massenverteilungen und Wechselwirkungen durch Felder anwendbar.

Im folgenden wird daher ein allgemeinerer Ansatz benutzt. Dazu wird die Außenwelt wieder zerlegt in einerseits das betrachtete physikalische System und andererseits die Umgebung, wobei nur eine Einwirkung der Umgebung auf das System, aber nicht umgekehrt, berücksichtigt wird. Für die Festlegung der momentanen Konfiguration des Systems sind s Parameter erforderlich, s ist die Zahl der Freiheitsgrade des Systems. Diese Parameter werden als generalisierte Koordinaten q_i bezeichnet. Für die Festlegung des Systemzustandes zur Zeit t sind in der klassischen Mechanik, anders als in der Quantenmechanik, außer den q_i auch noch ihre Ableitungen nach der Zeit, die generalisierten Geschwindigkeiten $\dot{q}_i$, erforderlich, also insgesamt $2s$ Variablen. Die Dynamik des Systems, einschließlich der Einwirkung durch die Umgebung, wird beschrieben durch eine deskriptive Funktion, die Lagrange-Funktion $L(q_i, \dot{q}_i, t)$.

1. Das Prinzip von Hamilton

Wie im Newtonschen Weltbild wird vorausgesetzt, daß die zeitliche Entwicklung des Systems, seine Bewegung mit der Bahn $q_i(t)$, kausal verläuft und durch den Anfangszustand $q_i(0), \dot{q}_i(0)$ determiniert ist. Die Funktionen $q_i(t)$ müssen daher die Lösungen (Integrale) eines gekoppelten Systems von s gewöhnlichen Differentialgleichungen 2. Ordnung sein. Diese sogenannten Bewegungsgleichungen folgen aus dem Hamiltonschen Prinzip der stationären Wirkung, das an die Stelle der Newtonschen Axiome tritt. Dazu wird ein (fiktiver) s-dimensionaler Raum, der Konfigurationsraum, betrachtet, dessen Achsen durch die q_i bezeichnet werden. Das System wird dann dargestellt durch einen Ersatzpunkt ("representative point", Mobile), der im Verlauf der Zeit die Konfigurationsbahn $\underline{q}(t) \mathrel{\hat{=}} q_1(t), \ldots, q_s(t)$ beschreibt. Für $t = 0$ geht sie durch den Anfangspunkt $\underline{q}(0) \mathrel{\hat{=}} q_1(0), \ldots, q_s(0)$. Vergleichsbahnen (Konkurrenzbahnen, virtuelle Bahnen) $\underline{\tilde{q}}(t)$ werden dadurch definiert, daß sie zu Beginn (t_a) und am Ende (t_b) der Bewegung mit der aktualen Konfigurationsbahn übereinstimmen und eventuell vorhandenen Nebenbedingungen genügen, aber sonst willkürlich sind:

$$\underline{\tilde{q}}(t_a) = \underline{q}(t_a) \quad , \quad \underline{\tilde{q}}(t_b) = \underline{q}(t_b) \ .$$

Die aktualen Bahnen sind dann vor den virtuellen dadurch ausgezeichnet, daß sie einem Extremalprinzip genügen, das dem Fermatschen Prinzip für die Lichtstrahlen in der Optik entspricht. Dieses Hamiltonsche Prinzip der stationären Wirkung fordert, daß das Wirkungsintegral

$$S = \int_{t_a}^{t_b} L(\underline{q}(t), \underline{\dot{q}}(t), t)\, dt$$

für die aktuale Bahn gegenüber den virtuellen Bahnen einen Extremwert annimmt, bei kleinen Variationen

$$\underline{\tilde{q}} = \underline{q} + \delta \underline{q}$$

also stationär ist. Für das Funktional $S[\underline{q}]$ muß daher gelten

$$\delta S = 0$$

mit der aktualen Bahn als Extremaler.

Ein Massenpunkt der Masse m bewegt sich unter dem Einfluß eines homogenen Schwerefeldes der Feldstärke $-g$. Wie später gezeigt werden wird, ist seine Lagrange-Funktion:

$$L(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mg\,z\ .$$

Mit den Anfangsbedingungen:

$$x(0) = y(0) = z(0) = 0\ ,\ \dot{x}(0) = V\ ,\ \dot{y}(0) = \dot{z}(0) = 0$$

beschreibt er dann eine Wurfparabel:

$$x(t) = V\,t\ ,\ y(t) \equiv 0\ ,\ z(t) = -\tfrac{1}{2}\,g\,t^2\ .$$

Hier ist $s = 3$, und der Konfigurationsraum kann mit dem wirklichen Raum identifiziert werden. Für $t_a = 0\,,\ t_b = T$ ist dann das Wirkungsintegral für die aktuale Bahn:

$$S[\underline{q}] = \int\limits_0^T \left[\frac{m}{2}(V^2 + g^2t^2) + \frac{m}{2}\,g^2t^2\right] dt = \frac{m}{2}\,V^2T + \tfrac{1}{3}\,mg^2T^3\ .$$

Als virtuelle Bahn betrachten wir eine geradlinig-gleichförmige Bewegung $\underline{\tilde{q}}(t)$ mit

$$\tilde{x}(t) = V\,t\ ,\ \tilde{y}(t) \equiv 0\ ,\ \tilde{z}(t) = -\tfrac{1}{2}\,g\,T\,t\ .$$

Für sie gilt, wie für die aktuale Bahn:

$$\tilde{x}(0) = \tilde{y}(0) = \tilde{z}(0) = 0 \quad \tilde{x}(T) = VT\ ,\ \tilde{y}(T) = 0\ ,\ \tilde{z}(T) = -\tfrac{1}{2}\,g\,T^2\ ,$$

aber das Wirkungsintegral ist

$$S[\underline{\tilde{q}}] = \int\limits_0^T \left[\frac{m}{2}(V^2 + \tfrac{1}{4}\,g^2T^2) + \frac{m}{2}\,g^2T\,t\right] dt = \frac{m}{2}\,V^2T + \tfrac{3}{8}\,mg^2T^3 \quad \geq\ S[\underline{q}]\ ,$$

wie es dem Hamiltonschen Prinzip entspricht.

Im allgemeinen Fall geht es um die Lösung des Variationsproblems

$$\delta \int\limits_{t_a}^{t_b} L(q_i(t), \dot{q}_i(t), t)\, dt = 0\ .$$

mit den Randbedingungen

$$\delta q_i(t_a) = \delta q_i(t_b) = 0\ .$$

Für die Variation bei einem festen t gilt

$$\delta q_i = \tilde{q}_i - q_i \quad , \quad \delta \dot{q}_i = \dot{\tilde{q}} - \dot{q}_i = \frac{d}{dt}(\tilde{q}_i - q_i) = \frac{d}{dt}(\delta q_i)\ .$$

Wegen der Linearität des Prozesses kann man also die Variation mit der Integration vertauschen. Der Integrand ist dann

$$\delta L = L(\tilde{q}_i(t), \dot{\tilde{q}}_i(t), t) - L(q_i(t), \dot{q}_i(t), t) = \sum_{i=1}^{s} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i\right)\ .$$

Für die entsprechende Änderung des Wirkungsintegrals erhält man damit

$$\delta S = \int\limits_{t_a}^{t_b} \sum_{i=1}^{s} \Big[\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \Big] \, dt \ .$$

Durch partielle Integration des zweiten Summanden ergibt sich dann bei Berücksichtigung der Randbedingungen

$$\int\limits_{t_a}^{t_b} \sum_{i=1}^{s} \Big[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \Big) \Big] \, \delta q_i \, dt = 0 \ .$$

Wegen der Unabhängigkeit der δq_i folgen daraus als Eulersche Gleichungen des Variationsproblems die Lagrange-Gleichungen:

$$\frac{d}{dt} \Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \Big) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad , \quad i = 1, \ldots, s \ .$$

Die Lösungen dieses Systems von Bewegungsgleichungen sind die Bahnen:

$$q_i = q_i(\underline{q}(0), \underline{\dot{q}}(0), t) \quad , \quad i = 1, \ldots, s \ ,$$

die von $2s$ Anfangsbedingungen abhängen.

Für das allgemeine Variationsproblem in einer Dimension:

$$\delta \int_a^b F(x, y, y') \, dx = 0$$

erfüllt die Lösungsfunktion $y(x)$ die Euler-Gleichung:

$$\frac{d}{dx} \Big(\frac{\partial F}{\partial y'} \Big) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \ .$$

Ein berühmtes Beispiel ist das Problem der Brachistochrone, also derjenigen Kurve, auf der sich ein Massenpunkt im homogenen Schwerefeld bewegen muß, um in kürzester Zeit von einem Punkt A zu einem anderen B zu gelangen. Johann Bernoulli forderte 1696 "alle Mathematiker Europas" - gemeint war aber in erster Linie Newton - auf, wie er eine Lösung zu finden. Newton erhielt diese Herausforderung am Abend des 29.1.1696, als er müde von seiner Tätigkeit in der Münze zurückkehrte, ruhte aber nicht, bis er am nächsten Morgen seine Lösung an die Royal Society senden konnte. Von dieser wurde sie anonym veröffentlicht, aber als Bernoulli sie sah, rief er aus: "Ex ungue leonem!" ("An der Pranke erkennt man den Löwen!").

Der Körper möge zur Zeit $t = 0$ im Ursprung eines Koordinatensystems ruhen, dessen x-Achse senkrecht nach unten und dessen y-Achse waagerecht gerichtet ist. Bis zum Erreichen des Endpunktes bei x benötigt er die Zeit

$$t = \int \frac{ds}{v} = \int\limits_0^x \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{v(x)} dx \ .$$

Dabei ist seine momentane Geschwindigkeit gegeben durch die Energieerhaltung:

$$\frac{m}{2} v^2 = m g x \quad \to \quad v = \sqrt{2gx} \ .$$

Das Variationsproblem lautet also:

$$\delta \int_0^x \sqrt{\frac{1 + y'^2}{x}} dx = 0 \quad \to \quad F(x, y, y') = \sqrt{\frac{1 + y'^2}{x}}$$

und die zugehörige Euler-Gleichung:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{\sqrt{x(1+y'^2)}}\right) = 0 \ .$$

In der Bezeichnungsweise der Mechanik ist y also eine zyklische Variable:

$$\rightarrow \quad \frac{y'}{\sqrt{x(1+y'^2)}} = c \ .$$

Durch Auflösen nach y' und Integration über x ergibt sich:

$$y(x) = c \int_0^x \left(\frac{x}{1-c^2x}\right)^{1/2} dx \ .$$

Zur Auswertung macht man mit der Abkürzung $a = 1/c^2$ die Substitution

$$x(\varphi) = a\,\cos^2(\varphi/2) = \frac{a}{2}(1-\cos\varphi) \quad \rightarrow \quad y(\varphi) = \frac{a}{2}(\varphi - \sin\varphi) \ .$$

Das ist die Gleichung einer gewöhnlicher ("gemeinen") Zykloide in Parameterform.

Die Lagrange-Gleichungen sind dem Hamilton-Prinzip äquivalent, das letztere hat aber bei allgemeinen Betrachtungen den Vorteil, daß es kompakter ist und nicht explizit von der Darstellung in Koordinaten abhängt. Es läßt sich daher ohne Änderung auch in anderen Gebiete der Physik, zum Beispiel der Theorie der Felder, verwenden.

Die Lagrange-Funktion eines Systems ist nur bis auf einen beliebigen konstanten Faktor bestimmt. Entfernt man zwei Teilsysteme A und B mit den Lagrange-Funktionen L_A und L_B so weit voneinander, daß ihre Wechselwirkung vernachlässigt werden kann, so gilt für die Lagrange-Funktion des Gesamtsystems

$$L \ \rightarrow \ L_A + L_B \ .$$

Die Lagrange-Funktionen sind also additiv, und der beliebige konstante Faktor muß daher für alle Teilsysteme der gleiche sein. Natürlich kann zur Lagrange-Funktion auch eine beliebige Konstante addiert werden, ohne daß die Bewegungsgleichungen sich ändern. Die Unbestimmtheit geht aber noch erheblich weiter. Addiert man zu L die totale Ableitung einer beliebigen Funktion $f(q_i,t)$ nach der Zeit:

$$\bar{L}(q_i,\dot{q}_i,t) = L(q_i,\dot{q}_i,t) + \frac{d}{dt} f(q_i,t) \ ,$$

so gilt für das Wirkungsintegral

$$\begin{aligned}\bar{S} &= \int_{t_a}^{t_b} \bar{L}(\underline{q}(t),\dot{\underline{q}}(t),t)\,dt = \int_{t_a}^{t_b} L(\underline{q}(t),\dot{\underline{q}}(t),t)\,dt + f(\underline{q}(t),t)\big|_{t_a}^{t_b} \\ &= S + f(\underline{q}(t_b),t_b) - f(\underline{q}(t_a),t_a) \ .\end{aligned}$$

Wegen der Randbedingungen ist dann aber

$$\delta\bar{S} = \delta S \ ,$$

und die Bewegungsgleichungen bleiben ungeändert.

Für den freien Fall in einer Dimension ($s=1$) ist

$$L = \frac{m}{2}\,\dot{z}^2 - mgz\ .$$

Die zugehörige Lagrange-Gleichung ist

$$m\ddot{z} + mg = 0\ .$$

Mit der geänderten Lagrange-Funktion

$$\bar{L} = L + \frac{d}{dt}(mgzt) = \frac{m}{2}\,\dot{z}^2 + mg\dot{z}t$$

ergibt sich dieselbe Bewegungsgleichung.

Bisher wurde nur vorausgesetzt, daß die betrachteten Systeme eine endliche Zahl von Freiheitsgraden haben und sich kausal-determiniert bewegen. Fordert man jetzt zusätzlich die Existenz eines homogenen und isotropen Raumes und einer homogenen Zeit, so wird dadurch die Lagrange-Funktion teilweise festgelegt. Speziell für einen freien Massenpunkt ($s=3\,,\ q_1=x\,,\ \ q_2=y\,,\ q_3=z$) kann L wegen der Homogenität von Raum und Zeit weder von $\boldsymbol{r}$ noch von t abhängen:

$$L = L(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = L(v_x, v_y, v_z)\ ,$$

ist also nur eine Funktion der Geschwindigkeit. Wegen der Isotropie des Raumes ist aber auch die Richtung der Geschwindigkeit ohne Bedeutung:

$$L = L(v^2) = L(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)\ .$$

Die Lagrange-Gleichungen lauten dann

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial v_x}\Big) - 0 = 0 \quad \to \quad \frac{\partial L}{\partial v^2}\,2\,v_x = c_x$$

und analog für v_y, v_z mit den Konstanten c_y, c_z. Durch Quadrieren und Addieren folgt

$$4\,\Big(\frac{\partial L}{\partial v^2}\Big)\,v^2 = c_x^2 + c_y^2 + c_z^2 \equiv c^2\ .$$

Es muß also $v^2\,\partial L/\partial v^2$ und damit auch v_x, v_y, v_z konstant sein. Ein freier Massenpunkt bewegt sich daher im absoluten Raum geradlinig-gleichförmig (Trägheitsgesetz). Das gleiche gilt aber auch gegenüber allen Bezugssystemen $(\bar{\boldsymbol{r}}, \bar{t})$, die aus $(\boldsymbol{r}, t)$ durch eine Galilei-Transformation

$$\bar{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{V}\,t \quad , \quad \bar{t} = t$$

mit konstantem $\boldsymbol{V}$ hervorgehen.Dadurch wird eine Klasse von Inertialsystemen festgelegt.

Wir betrachten jetzt eine infinitesimale Galilei-Transformation:

$$\bar{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{\epsilon}\,t \quad , \quad \bar{t} = t\ .$$

Dann gilt für die Lagrange-Funktion wegen $\bar{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{\epsilon}$

$$\bar{L} = L(\bar{v}^2) = L(v^2 - 2\,\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\epsilon} + \epsilon^2) \approx L(v^2) - \frac{\partial L}{\partial v^2}\,2\,\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\epsilon}\ .$$

Fordert man zusätzlich, daß sich auch bei dieser Transformation die Bewegungsgleichungen nicht ändern sollen (Galilei-Relativität), so muß gelten

$$\bar{L} = L + \frac{d}{dt} f(\boldsymbol{r}, t)\ .$$

Durch Vergleich folgt dann

$$-\frac{\partial L}{\partial v^2}\, 2\, \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\epsilon} = \frac{d}{dt} f(\boldsymbol{r}, t) \ ,$$

oder, bei Entwicklung beider Seiten:

$$-2\,\frac{\partial L}{\partial v^2}\,(\dot{x}\,\epsilon_x + \dot{y}\,\epsilon_y + \dot{z}\,\epsilon_z) = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}\,\dot{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\dot{y} + \frac{\partial f}{\partial z}\,\dot{z}$$

und daraus wegen der Unabhängigkeit der Variablen $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t$:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0 \ , \ \frac{\partial f}{\partial x} = -2\,\frac{\partial L}{\partial v^2}\,\epsilon_x \quad \text{usw.}$$

Da aber $\partial f/\partial x$ nur von $\boldsymbol{r}$ abhängt und $\partial L/\partial v^2$ nur von v^2, müssen beide Seiten der rechten Gleichung derselben Konstanten gleich sein:

$$\to \ \frac{\partial L}{\partial v^2} \equiv a \ .$$

Mit diesem Ansatz ist dann aber auch Invarianz gegenüber einer Galilei-Transformation mit endlichem $\boldsymbol{V}$ gegeben:

$$\begin{aligned}\bar{L} &= a\,\bar{v}^2 \ = \ a\,(v^2 - 2\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{V} + V^2) = a\,v^2 + a\,(-2\,\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{V} + V^2) \\ &= L + \frac{d}{dt}(-2\,a\,\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{V} + a\,V^2 t) \ .\end{aligned}$$

$\bar{L}$ und L unterscheiden sich also nur um die totale Ableitung einer Funktion von $\boldsymbol{r}$ und t nach der Zeit. Definiert man die Masse des Massenpunktes durch $2a = m$, so gilt schließlich:

$$L = \frac{m}{2}\,v^2 = T \ .$$

Bei der Erweiterung auf ein System von N nichtwechselwirkenden Massenpunkten ergibt sich nach den obigen Erörterungen

$$L = \sum_{j=1}^{N} \tfrac{1}{2}\,m_j\,\boldsymbol{v}_j^2 = \sum_{i=1}^{3N} \tfrac{1}{2}\,m_i\,\dot{x}_i^2 \ .$$

Der willkürliche gemeinsame Faktor kann zur Festlegung der Masseneinheit benutzt werden. Die Lagrange-Funktion ist in diesem Fall identisch mit der kinetischen Energie. Diese muß in Bezug auf ein Inertialsystem berechnet werden. Bei einer Galilei-Transformation geht sie über in

$$\bar{T} = \sum_j \tfrac{1}{2}\,m_j\,\boldsymbol{v}_j^2 + \sum_j \frac{m_j}{2}\,(V^2 - 2\,\boldsymbol{v}_j\cdot\boldsymbol{V}) = T + \frac{d}{dt}\Big[\sum_j \frac{m_j}{2}\,(V^2 t - 2\,\boldsymbol{r}_j\cdot\boldsymbol{V})\Big] \ ,$$

was keine Änderung der Bewegungsgleichungen zur Folge hat.

Beim Bestehen von Wechselwirkungen zwischen den Massenpunkten des Systems läßt sich die Form der Lagrange-Funktion nicht mehr aus den Eigenschaften von Raum und Zeit allein herleiten. Der Newtonsche Ansatz von momentan wirkenden Fernkräften wird wiedergegeben durch eine potentielle Energie, die nur von den Ortsvektoren der Massenpunkte abhängt:

$$L = \sum_{j=1}^{N} \frac{m_j}{2}\,\boldsymbol{v}_j^2 - V(\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_N) \ .$$

Wegen der Erhaltungssätze von Impuls, Drehimpuls und Energie eines abgeschlossenen Systems muß weiter gelten

$$V(\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_N) = \sum_{i<j} V_{ij}(|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|) \ .$$

Ein nichtabgeschlossenes System A kann stets formal abgeschlossen werden durch die Einbeziehung des mit ihm wechselwirkenden Systems B. Die Lagrange-Funktion des Gesamtsystems hat dann die Form

$$L = T_A(q_A, \dot{q}_A) + T_B(q_B, \dot{q}_B) - V(q_A, q_B) \ .$$

Vernachlässigt man die Rückwirkung von A auf die Umgebung B, so lassen sich die Bewegungsgleichungen für B ohne Berücksichtigung von A lösen und ergeben die Bahnen

$$q_B = q_B(\underline{q}_B(0), \underline{\dot{q}}_B(0), t) \ .$$

Diese werden wiederum in die potentielle Energie der Wechselwirkung eingesetzt, und man erhält als Lagrange-Funktion für A

$$L_A = T_A(\underline{q}_A, \underline{\dot{q}}_A) - V(\underline{q}_A, \underline{q}_B(t)) \ .$$

Die potentielle Energie ist jetzt also explizit von t abhängig:

$$V = V(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N, t) \ ,$$

was auf die Wechselwirkung mit der Umgebung zurückzuführen ist. Eine Abhängigkeit von den Geschwindigkeiten $\boldsymbol{v}_j$ ist aber auch in diesem Fall unmöglich, wenn die Umgebung B nur aus Massenpunkten aufgebaut ist. Sie tritt dagegen auf, wenn in B Felder enthalten sind, so gilt für einen Massenpunkt mit der Masse m und der Ladung q in einem äußeren elektromagnetischen Feld die Bewegungsgleichung

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = q\,[\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) + \frac{\boldsymbol{v}}{c} \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)] \ .$$

Sie läßt sich wiedergeben durch eine Lagrange-Funktion

$$L = T - q\,\Phi + q\,\frac{\boldsymbol{v}}{c} \cdot \boldsymbol{A} \ .$$

Dabei sind Φ und $\boldsymbol{A}$ das skalare und das Vektorpotential des Feldes:

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \quad , \quad \boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} \ .$$

Die potentielle Energie enthält hier also einen geschwindigkeitsabhängigen Term (generaliertes Potential):

$$V(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}, t) = q\,[\Phi(\boldsymbol{r},t) - \frac{\boldsymbol{v}}{c} \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)] \ .$$

Die zu diesem L gehörige Bewegungsgleichung für die Koordinate x ist

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x} + \frac{q}{c}A_x) - q\,\Big[-\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\dot{x}}{c}\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\dot{y}}{c}\frac{\partial A_y}{\partial x} + \frac{\dot{z}}{c}\frac{\partial A_z}{\partial x}\Big] = 0 \ .$$

Die totale Ableitung von A_x ist andererseits

$$\frac{dA_x}{dt} = \frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{\partial A_x}{\partial x}\,\dot{x} + \frac{\partial A_x}{\partial y}\,\dot{y} + \frac{\partial A_x}{\partial z}\,\dot{z} \ .$$

Setzt man das auf der linken Seite der Bewegungsgleichung ein, so entsteht die x-Komponente der Vektorgleichung

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = q\,[(-\nabla\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}) + \frac{\boldsymbol{v}}{c} \times (\nabla \times \boldsymbol{A})] \ ,$$

die mit der ursprünglichen Bewegungsgleichung übereinstimmt. Die Potentiale Φ und $\boldsymbol{A}$ sind durch die Felder $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{B}$ aber nicht eindeutig festgelegt. Die Transformation

$$\bar{\Phi} = \Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\chi}{\partial t} \quad , \quad \bar{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A} + \nabla\chi$$

mit beliebigem $\chi(\boldsymbol{r}, t)$ führt zur Eichinvarianz ("gauge invariance"):

$$\bar{\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{E} \quad , \quad \bar{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{B} \ .$$

Die entsprechende Änderung der Lagrange-Funktion ist

$$\bar{L} = L + \frac{q}{c}\Big(\frac{\partial\chi}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\chi\Big) = L + \frac{d}{dt}\Big(\frac{q}{c}\,\chi\Big) \ ,$$

läßt also ebenfalls die Bewegungsgleichungen invariant.

Schließt man durch Einbeziehung der Umgebung mit ihrem elektromagnetischen Feld das Gesamtsystem ab, so sind dessen Bewegungsgleichungen nicht mehr invariant gegenüber Galilei-Transformationen. Eines der Inertialsysteme ist vor den anderen ausgezeichnet, nur in ihm gelten die Maxwellschen Gleichungen. Bis zur Entwicklung der Relativitätstheorie wurde das mit der Existenz einer Trägersubstanz für das elektromagnetische Feld ("Äther") begründet, die in diesem speziellen Inertialsystem ruht.

Wegen der Forminvarianz der Lagrange-Gleichungen ist bei einer Punkttransformation

$$x_i = x_i(q_1, \ldots, q_s, t) \quad , \quad i = 1, \ldots, 3N$$

nur die Umrechnung der kinetischen Energie T erforderlich. Die Geschwindigkeiten transformieren sich in jedem Fall linear:

$$\dot{x}_i = \sum_k \frac{\partial x_i}{\partial q_k}\,\dot{q}_k + \frac{\partial x_i}{\partial t} \ .$$

Die kinetische Energie erhält dadurch die Gestalt

$$T = \sum_i \frac{m_i}{2}\,\dot{x}_i^2 = \sum_{k,l} a_{kl}\,\dot{q}_k\dot{q}_l + \sum_k b_k\,\dot{q}_k + c = T_2 + T_1 + T_0 \ .$$

Dabei sind a_{kl}, b_k und c Funktionen von q_i und t. T_2, T_1 und T_0 sind homogene Funktionen der $\dot{q}_i$ vom Grade $2, 1$ und 0. Falls die Koordinatentransformation nicht explizit von der Zeit abhängt, fallen die Terme T_1 und T_0 weg, T ist dann homogen quadratisch in den $\dot{q}_i$.

Für einen Massenpunkt ($s\!=\!3$) wird die Transformation von kartesischen auf Kugelkoordinaten (sphärische Polarkoordinaten) geleistet durch

$$\begin{aligned} x &= r\sin\vartheta\cos\varphi \\ y &= r\sin\vartheta\sin\varphi \\ z &= r\cos\vartheta \ . \end{aligned}$$

Seine kinetische Energie ist daher

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + r^2\sin^2\vartheta\,\dot{\varphi}^2) \ .$$

Damit lauten die Bewegungsgleichungen nach Lagrange

$$\begin{aligned} m\ddot{r} - mr\dot{\vartheta}^2 - m\,r\sin^2\vartheta\,\dot{\varphi}^2 &= -\frac{\partial V}{\partial r} \\ mr^2\ddot{\vartheta} + 2m\,r\dot{r}\,\dot{\vartheta} - mr^2\sin\vartheta\cos\vartheta\,\dot{\varphi}^2 &= -\frac{\partial V}{\partial \vartheta} \\ mr^2\sin^2\vartheta\,\ddot{\varphi} + 2mr\sin^2\vartheta\,\dot{r}\dot{\varphi} + 2mr^2\sin\vartheta\cos\vartheta\,\dot{\vartheta}\,\dot{\varphi} &= -\frac{\partial V}{\partial \varphi}\ . \end{aligned}$$

Die Verwendung der Lagrange-Formulierung der Mechanik bringt wesentliche Vorteile gegenüber der Newton-Formulierung, wenn durch die Natur des Problems, zum Beispiel bei Zwangsbedingungen, die Verwendung von krummlinigen Koordinatensystemen zweckmäßig ist, und ist sogar unumgänglich, wenn die betrachteten Systeme nicht aus einer endlichen Zahl von Massenpunkten aufgebaut werden können.

Beim sphärischen Pendel (Kugelpendel) mit $s=2$ liegt die Verwendung von Kugelkoordinaten $r \equiv l, \vartheta, \varphi$ nahe:

$$T = \frac{m}{2}\,l^2(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2\vartheta\,\dot{\varphi}^2)\ ,\ V = mg\,l\cos\vartheta \quad \rightarrow \quad L = \frac{m}{2}\,l^2(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2\vartheta\,\dot{\varphi}^2) - mg\,l\cos\vartheta\ .$$

Die Lagrange-Gleichungen lauten damit

$$\begin{aligned} &\tfrac{d}{dt}(ml^2\dot{\vartheta}) - ml^2\sin\vartheta\cos\vartheta\,\dot{\varphi}^2 - mg\,l\sin\vartheta &&= 0 \\ &\tfrac{d}{dt}(ml^2\sin^2\vartheta\,\dot{\varphi}) &&= 0\ . \end{aligned}$$

Es handelt sich um zwei gekoppelte nichtlineare Differentialgleichungen 2. Ordnung für $\vartheta(t), \varphi(t)$. Die zweite Gleichung läßt sich sofort einmal integrieren:

$$ml^2\sin^2\vartheta\,\dot{\varphi} = ml^2 a\ ,$$

wobei a eine Konstante ist. Die linke Seite stellt also eine Erhaltungsgröße dar, nämlich die z-Komponente des Drehimpulses. Durch Einsetzen in die ϑ-Gleichung folgt

$$\ddot{\vartheta} - a^2\,\frac{\cos\vartheta}{\sin^3\vartheta} - \frac{g}{l}\sin\vartheta = 0\ .$$

Das ist eine nichtlineare Differentialgleichung 2. Ordnung für $\vartheta(t)$ allein, die für $a=0$ als Sonderfall die Bewegungsgleichung des ebenen Pendels enthält. Durch Integration folgt mit der Integrationskonstanten E

$$\dot{\vartheta}^2 - \frac{2}{ml^2}\,[E - \frac{ml^2a^2}{2\sin^2\vartheta} - mg\,l\cos\vartheta] = 0\ .$$

Diese Beziehung drückt im wesentlichen die Erhaltung der Gesamtenergie in diesem Potentialfeld aus:

$$T + V = \frac{m}{2}\,l^2(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2\vartheta\,\dot{\varphi}^2) + mg\,l\cos\vartheta = E$$

und entsteht daraus durch Einsetzen für $\dot{\varphi}$. Mit der neuen Variablen $u = \cos\vartheta$ ergibt sich daraus eine Differentialgleichung 1. Ordnung:

$$\begin{aligned} u &= \cos\vartheta \ \rightarrow\ \dot{\vartheta} = -\,(1-u^2)^{-1/2}\,\dot{u} \\ \rightarrow \quad \frac{du}{dt} &= \left\{\frac{2}{ml^2}\left[(E - mglu)(1-u^2) - \frac{ml^2a^2}{2}\right]\right\}^{1/2} = [U(u)]^{1/2}\ . \end{aligned}$$

Sie läßt sich durch Trennung der Variablen lösen:

$$t(u) = \int\limits_{u_0}^{u} [U(u)]^{-1/2}\,du\ ,$$

dabei entsteht auf der rechten Seite ein elliptisches Integral. Statt einer formalen Lösung empfiehlt sich die Diskussion der Gleichung (Fig. B1)

$$\dot{u}^2 = U(u)\ .$$

Die rechte Seite hat als Polynom 3. Grades bei gegebenem a für hinreichend großes E drei Nullstellen u_1, u_2, u_3, von denen die dritte außerhalb des sinnvollen Intervalls $-1 \leq u \leq +1$

liegt und ohne Bedeutung ist. Die Bewegung erfolgt also zwischen u_1 und u_2 und entspricht einer periodischen Änderung von $\vartheta(t)$ zwischen zwei Breitenkreisen ϑ_1 und ϑ_2. Für die entsprechende Änderung von $\varphi(t)$ gilt

$$\frac{d\varphi}{du} = \frac{\dot{\varphi}}{\dot{u}} = \frac{a}{1-u^2}\frac{1}{\sqrt{U(u)}} \ .$$

Diese Gleichung läßt sich direkt durch eine Quadratur lösen und ergibt

$$\varphi(u) = a\int\limits_{u_0}^{u} \left[(1-u^2)\sqrt{U(u)}\right]^{-1} du \ .$$

Es handelt sich ebenfalls um eine periodische Bewegung, doch sind die ϑ-Periode und die φ-Periode im allgemeinen nicht kommensurabel, und die Bahn ist nicht geschlossen.

2. Symmetrien und Erhaltungssätze

Die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen bilden ein simultanes System von s gewöhnlichen Differentialgleichungen 2. Ordnung für die Funktionen $q_i(t)$, so daß insgesamt $2s$ Integrationen erforderlich sind. Eine Funktion der dynamischen Variablen $q_i, \dot{q}_i$ und der Zeit t, die sich bei der Bewegung des Systems auf einer Bahn nicht ändert, für die also gilt

$$\frac{d}{dt} f(q_i(t), \dot{q}_i(t), t) = 0 \ ,$$

heißt ein Bewegungsintegral ("(first) integral of motion"), oder, falls sie die Zeit nicht explizit enthält, eine Erhaltungsgröße ("conserved quantity"). Ihr Wert hängt ab von den $2s$ Anfangsbedingungen der Bahn:

$$f(q_i(t), \dot{q}_i(t), t) \equiv c(\underline{q}(0), \underline{\dot{q}}(0)) \ .$$

Es kann daher für ein System mit s Freiheitsgraden höchstens $2s$ Bewegungsintegrale geben. Davon können wiederum höchstens $2s-1$ Erhaltungsgrößen sein, da sich sonst beim Auflösen der $2s$ Gleichungen nach den $q_i, \dot{q}_i$ für diese zeitlich konstante Werte ergeben würden und das System unbewegt bliebe.

Falls eine Variable q_k nicht explizit in der Lagrange-Funktion auftritt:

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \ ,$$

nennt man sie zyklisch ("cyclic","ignorable"). Es folgt dann aus der zugehörigen Lagrange-Gleichung

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\Big) = 0 \ .$$

Der zu einer Variablen q_i kanonisch-konjugierte Impuls p_i wird allgemein definiert durch

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ .$$

Der zu einer zyklischen Variablen q_k konjugierte Impuls ist also ein Bewegungsintegral. Für ein System von Massenpunkten in einem orts- und zeitabhängigen Potentialfeld ist

$$p_i = m_i \, \dot{x}_i \ .$$

Bei einem geschwindigkeitsabhängigen Potential ist der konjugierte Impuls aber im allgemeinen verschieden von diesem kinetischen Impuls. Für einen geladenen Massenpunkt im elektromagnetischen Feld gilt zum Beispiel

$$p_i = m_i\,\dot{x}_i + \frac{q}{c}\,A_i \ .$$

Für generalisierte Koordinaten q_i, die nicht die Dimension einer Länge haben, ist p_i nicht von der Dimension Masse $\times$ Geschwindigkeit. Der zu einer Winkelkoordinate konjugierte Impuls ist beispielsweise ein Drehimpuls. Das Produkt $q_i\,p_i$ hat aber stets die Dimension einer Wirkung (Energie $\times$ Zeit).

Da es nur s generalisierte Koordinaten gibt, lassen sich nicht alle $2s$ maximal möglichen Bewegungsintegrale als konjugierte Impulse zu zyklischen Variablen darstellen.

Für einen Massenpunkt der Masse m im homogenen Schwerefeld der Feldstärke $(0,0,-g)$ lautet die Lagrange-Funktion in kartesischen Koordinaten

$$L(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z}) = \frac{m}{2}\,(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) - mg\,z \ .$$

Die Variablen x und y sind zyklisch, die zugehörigen konjugierten Impulse

$$p_x = m\,\dot{x} \qquad p_y = m\,\dot{y}$$

also Bewegungsintegrale. Da es sich um ein Potentialfeld handelt, ist die Energie

$$E = \frac{m}{2}\,(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) + mg\,z$$

ebenfalls ein Bewegungsintegral.

Bei der Transformation auf Zylinderkoordinaten ρ,φ,z wird

$$L = \frac{m}{2}\,(\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\varphi}^2+\dot{z}^2) - mg\,z \ .$$

Die Variable φ ist zyklisch, der zu ihr konjugierte Impuls

$$L_z = m\rho^2\dot{\varphi} = m(x\,\dot{y} - y\,\dot{x})$$

also ebenfalls ein Bewegungsintegral, die z-Komponente des Drehimpulses.

Durch Einsetzen der Bewegungsgleichungen kann man zeigen, daß die totale Ableitung dA_z/dt der Größe

$$A_z = (\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)\,z - (x\dot{x}+y\dot{y}+z\dot{z})\,\dot{z} - \frac{g}{2}\,(x^2+y^2)$$

verschwindet, A_z also eine weitere Erhaltungsgröße darstellt. Da p_x, p_y, E, L_z, A_z unabhängig sind und die Zeit nicht explizit enthalten, ist damit wegen $s=3$ die maximale Anzahl von Erhaltungsgrößen vorhanden.

Das Auftreten zyklischer Variablen und damit die Existenz von Bewegungsintegralen hängt eng zusammen mit Symmetrien des Systems. Eine solche Symmetrie liegt vor, wenn die Lagrange-Funktion des Systems gegenüber einer Symmetrietransformation der Variablen:

$$\tilde{q}_i = h_i(\underline{q},\alpha)$$

invariant ist, wenn also gilt

$$L(\tilde{q}_i,\dot{\tilde{q}}_i,t) = L(q_i,\dot{q}_i,t) \ .$$

Dabei ist die Transformation von einem Parameter α abhängig, mit der Bedingung, daß sich für $\alpha\!=\!0$ die identische Transformation ergibt:

$$h_i(\underline{q},0) = q_i \ .$$

Bei einer zyklischen Variablen q_k besteht die Symmetrietransformation in einer Verschiebung um α längs der q_k-Achse im Konfigurationsraum:

$$\tilde{q}_k = q_k + \alpha \ ,$$

bei der die Lagrange-Funktion sich natürlich nicht ändert, da sie gar nicht von q_k abhängt.

> Die Lagrange-Funktion für das Kugelpendel:
>
> $$L = \frac{m}{2} l^2(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2\vartheta\, \dot{\varphi}^2) - mg\, l \cos\vartheta$$
>
> ist invariant gegenüber der Transformation
>
> $$\tilde{\vartheta} = \vartheta \quad , \quad \tilde{\varphi} = \varphi + \alpha \ ,$$
>
> also einer Drehung um die z-Achse um den Winkel α, wobei sich für $\alpha = 0$ die Identität ergibt.

Im allgemeinen Fall gilt für autonome Systeme, für die also L nicht explizit von der Zeit abhängt, das Theorem von Emmy Noether:

> Die Lagrange-Funktion $L(\underline{q}, \underline{\dot{q}})$ sei unter der Transformation $q_i \to h_i(\underline{q}, \alpha)$ invariant, wo α ein kontinuierlicher Parameter und $h_i(\underline{q}, 0) = q_i$ die Identität ist.
> Es existiert dann ein Bewegungsintegral
>
> $$G(q_i, \dot{q}_i) = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{d\alpha} h_i(\underline{q}, \alpha)|_{\alpha=0} \ .$$

Einerseits erfüllen nämlich auch die transformierten Bahnen $\tilde{q}_i(t,\alpha) = h_i(\underline{q}(t), \alpha)$ die Lagrange-Gleichungen:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(\underline{\tilde{q}}(t,\alpha), \underline{\dot{\tilde{q}}}(t,\alpha)) = \frac{\partial L}{\partial q_i}(\underline{\tilde{q}}(t,\alpha), \underline{\dot{\tilde{q}}}(t,\alpha)) \ ,$$

andererseits soll nach Voraussetzung L invariant gegenüber der Symmetrietransformation sein, also nicht von α abhängen:

$$\frac{d}{d\alpha} L(\underline{\tilde{q}}(t,\alpha), \underline{\dot{\tilde{q}}}(t,\alpha)) = \sum_{i=1}^{s} \Big(\frac{\partial L}{\partial q_i}\frac{d\tilde{q}_i}{d\alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{d\dot{\tilde{q}}_i}{d\alpha}\Big) = 0 \ .$$

Durch Einsetzen von $\partial L/\partial q_i$ aus der ersten in die zweite Gleichung folgt wegen der Vertauschbarkeit der Differentiationen nach t und α:

$$\sum_{i=1}^{s} \Big[\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\Big)\frac{d\tilde{q}_i}{d\alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{d}{dt}\Big(\frac{d\tilde{q}_i}{d\alpha}\Big)\Big] = 0$$

und daraus, sogar für beliebige α, der Beweis der Behauptung:

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{s} \Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\Big)\frac{d\tilde{q}_i}{d\alpha} = 0 \ .$$

Es werden zunächst einige spezielle Symmetrien betrachtet.

a) Homogenität des Raumes

Da kein Raumpunkt ausgezeichnet ist, stellt für ein abgeschlossenes System die Verschiebung um a_x in x-Richtung eine Symmetrietransformation dar. Besteht das System aus Massenpunkten, so folgt (aktiver Standpunkt):

$$\tilde{x}_j = x_j + a_x \quad , \quad j = 1, \ldots, N \ .$$

Das entsprechende Bewegungsintegral ist nach dem Noether-Theorem

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} \frac{d}{da_x}(x_j + a_x)|_{a_x=0} = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} = \sum_{j=1}^{N} p_{xj} = P_x \ ,$$

also die x-Komponente des Gesamtlinearimpulses. Entsprechendes gilt für die y- und die z-Koordinate.

b) Isotropie des Raumes

Da keine Drehrichtung im Raum ausgezeichnet ist, stellt die Drehung um die z-Achse um α_z für abgeschlossene Systeme eine Symmetrietransformation dar. Die Lagrange-Funktion muß dabei invariant bleiben. Für ein System von Massenpunkten gilt das nur, wenn die Wechselwirkungskräfte in der Verbindungslinie liegen. Ihre Koordinaten ändern sich bei der Drehung in der folgenden Weise (aktiver Standpunkt):

$$\begin{aligned} \tilde{x}_j &= x_j \, \cos\alpha_z - y_j \, \sin\alpha_z \\ \tilde{y}_j &= x_j \, \sin\alpha_z + y_j \, \cos\alpha_z \ . \end{aligned}$$

Das zugehörige Bewegungsintegral ist dann

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{N} \Big[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} \frac{d}{d\alpha_z}(x_j \cos\alpha_z - y_j \sin\alpha_z)|_{\alpha_z=0} + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_j} \frac{d}{d\alpha_z}(x_j \sin\alpha_z + y_j \cos\alpha_z)|_{\alpha_z=0} \Big] \\ &\qquad = \sum_{j=1}^{N} \Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_j} x_j - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} y_j \Big) = \sum_{j=1}^{N} (x_j \, p_{yj} - y_j \, p_{xj}) = \sum_{j=1}^{N} l_{zj} = L_z \ , \end{aligned}$$

also die z-Komponente des Gesamtdrehimpulses. Entsprechendes gilt für die x- und die y-Komponente.

Wenn das System nicht abgeschlossen ist, kann seine Lagrange-Funktion trotzdem gegenüber einigen dieser Symmetrietransformationen invariant sein und zu den entsprechenden Bewegungsintegralen führen.

Für einen Massenpunkt der Masse m, der sich in einem homogenen Schwerefeld bewegt, ist die Lagrange-Funktion

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mg\, z \ .$$

Obwohl dieses System nicht abgeschlossen ist, stellen die Verschiebungen in x- und y-Richtung und die Drehung um die z-Achse Symmetrieoperationen dar. Es bleiben daher p_x, p_y und L_z erhalten.

Das Noether-Theorem wurde hier nur für autonome Systeme und zeitunabhängige Symmetrietransformationen bewiesen. Daher kann an dieser Stelle das aus der Galilei-Invarianz der leeren Raumzeit folgende Schwerpunktintegral für ein abgeschlossenes System nicht abgeleitet werden. Das Theorem gilt auch für den zeitabhängigen Fall, nimmt dann aber eine wesentlich kompliziertere Gestalt an (Killing-Gleichungen).

c) Homogenität der Zeit

Die Zeit t ist in der klassischen Mechanik keine generalisierte Koordinate, sondern ein Parameter, daher läßt sich das Noether-Theorem hier nicht unmittelbar anwenden.

Da kein Zeitpunkt ausgezeichnet ist, kann die Lagrange-Funktion nicht explizit von der Zeit abhängen:

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \ .$$

Für die totale Ableitung von L nach der Zeit gilt daher

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial t} + \sum_{i=1}^{s} \Big(\frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \Big) = 0 + \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{s} \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ ,$$

denn aus den Lagrange-Gleichungen folgt

$$\frac{d}{dt} \Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \Big) = \frac{\partial L}{\partial q_i} \ .$$

Man kann daher schreiben

$$\frac{d}{dt} \Big(\sum_{i=1}^{s} \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \Big) = \frac{dH}{dt} = 0 \ ,$$

wobei die Hamilton-Funktion H definiert wird durch

$$H = \sum_{i=1}^{s} \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L = \sum_{i=1}^{s} \dot{q}_i \, p_i - L \ .$$

In diesem Fall ist also die Hamilton-Funktion eine Erhaltungsgröße, denn wegen

$$\frac{\partial H}{\partial t} = - \frac{\partial L}{\partial t}$$

kann auch sie nicht explizit von der Zeit abhängen.

Falls die kinetische Energie T eine homogene Funktion 2. Grades der $\dot{q}_i$ ist (natürliches System), was zum Beispiel für ein Inertialsystem gilt, kann man das Theorem von Euler über homogene Funktionen vom Grade n benutzen:

$$f(\alpha x_1, \ldots, \alpha x_m) = \alpha^n f(x_1, \ldots, x_m) \quad \rightarrow \quad \sum_{i=1}^{m} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = n f \ .$$

Die Anwendung auf die kinetische Energie T ergibt:

$$\sum_{i=1}^{s} \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{i=1}^{s} \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 2T \ .$$

Damit erhält man für die Hamilton-Funktion:

$$H = \sum_{i=1}^{s} \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L = 2T - (T - V) = T + V \ .$$

Sie ist dann also gleich der Gesamtenergie.

Für einen Massenpunkt der Masse m, der an eine Ebene gebunden ist, die mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω um die in ihr liegende z-Achse rotiert, und auf den ein rotationssymmetrisches Kraftfeld wirkt, ist im raumfesten Bezugssystem

$$L = \frac{m}{2}\,(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(\sqrt{x^2+y^2}, z) \ .$$

Beim Übergang auf Zylinderkoordinaten ρ, φ, z gilt dann

$$x = \rho\cos(\omega t) \quad , \quad y = \rho\sin(\omega t)$$

und damit für die Lagrange-Funktion, ausgedrückt durch die Variablen im rotierenden Bezugssystem:

$$L = \frac{m}{2}\,(\dot{\rho}^2 + \rho^2\omega^2 + \dot{z}^2) - V(\rho, z) \ .$$

Hier ist die kinetische Energie wegen des Anteils $m\rho^2\omega^2/2$ nicht mehr homogen-quadratisch in $\dot{\rho}, \dot{z}$. Für die Hamilton-Funktion ergibt sich:

$$H = \frac{m}{2}\,(\dot{\rho}^2 + \dot{z}^2 - \rho^2\omega^2) + V(\rho, z) \ .$$

Sie stellt eine Erhaltungsgröße dar, stimmt aber nicht mit der Gesamtenergie

$$E = T + V = \frac{m}{2}\,(\dot{\rho}^2 + \dot{z}^2 + \rho^2\omega^2) + V(\rho, z)$$

überein. Diese bleibt nicht erhalten, da die Zwangskräfte Arbeit am System leisten.

Das Theorem von Noether bezieht sich nur auf Transformationen, die über einen Parameter kontinuierlich aus der Identität hervorgehen. Daneben gibt es auch unstetige Transformationen wie die Raum-, Zeit- und Ladungsspiegelung, denen ebenfalls Erhaltungsgrößen zugeordnet sind (Parität). Sie spielen in der klassischen Mechanik kaum eine Rolle, sind aber von großer Bedeutung in der Quantenmechanik.

3. Das Zweikörperproblem

Betrachtet wird ein abgeschlossenes System, das aus zwei Massenpunkten besteht ($N=2 \rightarrow s=6$), deren Wechselwirkung durch eine potentielle Energie beschrieben werden kann, die nur von ihrem Abstand abhängt. Seine Dynamik ist von grundlegender Bedeutung sowohl für die Planetenbewegung (Kepler-Problem) in der Himmelsmechanik, als auch für das Wasserstoffatom (Coulomb-Problem) in der Quantenmechanik. In diesen beiden Fällen können die Massenpunkte auch durch kugelsymmetrische Massen- bzw. Ladungsverteilungen ersetzt werden, solange deren Abstand größer als die Summe ihrer Radien ist. Häufig wird in eingeschränkter Bedeutung als Zweikörperproblem auch dieser Sonderfall bezeichnet, bei dem die potentielle Energie die Form hat:

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r} \ .$$

Für beliebiges $V(r)$ lauten die Newtonschen Bewegungsgleichungen für die beiden Massenpunkte mit den Massen m_1 und m_2:

$$\begin{aligned} m_1\frac{d^2\boldsymbol{r}_1}{dt^2} &= -\frac{1}{r}\frac{dV}{dr}\,(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) \\ m_2\frac{d^2\boldsymbol{r}_2}{dt^2} &= -\frac{1}{r}\frac{dV}{dr}\,(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1) \ . \end{aligned}$$

Dazu kommen die Anfangsbedingungen

$$\boldsymbol{r}_1(t_0) = \boldsymbol{r}_{10} \ , \ \boldsymbol{v}_1(t_0) = \boldsymbol{v}_{10} \ , \ \boldsymbol{r}_2(t_0) = \boldsymbol{r}_{20} \ , \ \boldsymbol{v}_2(t_0) = \boldsymbol{v}_{20} \ .$$

Dieses simultane System von sechs gewöhnlichen Differentialgleichungen 2. Ordnung für die Funktionen $x_1(t), y_1(t), \dots, z_2(t)$ ist nur in Sonderfällen direkt lösbar, zum Beispiel für $V(r) = \beta r^2$. Speziell für das Kepler-Problem ergibt sich

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = \alpha \left[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2\right]^{-3/2} (x_2 - x_1)$$

zusammen mit fünf weiteren analogen Gleichungen, die sich nicht unmittelbar separieren lassen. Wie schon besprochen, folgt für dieses abgeschlossene System aus den Symmetrieeigenschaften von Raum und Zeit die Existenz von zehn Bewegungsintegralen:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{P} &= m_1\, \boldsymbol{v}_1 + m_2\, \boldsymbol{v}_2 \\
\boldsymbol{L} &= m_1\, \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{v}_1 + m_2\, \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{v}_2 \\
E_0 &= \tfrac{1}{2} m_1\, \boldsymbol{v}_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2\, \boldsymbol{v}_2^2 + V(|\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1|) \\
\boldsymbol{R}_0 &= [m_1 (\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{v}_1\, t) + m_2 (\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{v}_2\, t)]/(m_1 + m_2) \ .
\end{aligned}$$

Die Lagrange-Funktion läßt sich schreiben als:

$$L = \tfrac{1}{2} m_1\, \boldsymbol{v}_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2\, \boldsymbol{v}_2^2 - V(|\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1|) \ .$$

Durch die lineare Punkttransformation auf das System des Massenmittelpunktes:

$$\boldsymbol{R} = (m_1 \boldsymbol{r}_1 + m_2 \boldsymbol{r}_2)/(m_1 + m_2) \quad , \quad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$$

und mit den Abkürzungen $M = m_1 + m_2$, $m = m_1\, m_2/(m_1 + m_2)$ läßt sie sich zerlegen in

$$L = \tfrac{1}{2} M\ \boldsymbol{V}^2 + \tfrac{1}{2} m\, \boldsymbol{v}^2 - V(r) = L_A + L_B$$

und beschreibt dann zwei unabhängige Teilsysteme, nämlich den kräftefreien Massenmittelpunkt mit der Gesamtmasse M und einen (fiktiven) Massenpunkt mit der reduzierten Masse m, der sich in einem äußeren Potentialfeld $V(r)$ bewegt.

Die Bewegungsgleichungen für das erste Teilsystem lassen sich unmittelbar integrieren und liefern die Bahn

$$\boldsymbol{R}(t) = \boldsymbol{R}_0 + \frac{1}{M} \boldsymbol{P}\, (t - t_0) \ ,$$

die die sechs Bewegungsintegrale $\boldsymbol{P}$ und $\boldsymbol{R}_0$ enthält. Auch seine Energie bleibt erhalten:

$$E_B = \frac{1}{2M} \boldsymbol{P}^2 \ ,$$

stellt aber kein unabhängiges Bewegungsintegral dar.

Für das zweite Teilsystem lauten die Bewegungsgleichungen

$$m \frac{d^2 \boldsymbol{r}}{dt^2} = -\frac{1}{r} \frac{dV}{dr} \boldsymbol{r} \ .$$

Da es sich um die Bewegung in einem radialen Potentialfeld handelt, bleiben der Drehimpuls und die Energie erhalten:

$$\begin{aligned}
E &= \frac{m}{2} \mathbf{v}^2 + V(r) \\
\boldsymbol{L} &= m\, \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v} \ ,
\end{aligned}$$

wobei wegen der Additivität der Energie gilt

$$E = E_0 - E_B \ .$$

Als Bezugspunkt für den Drehimpuls wurde dabei der Massenmittelpunkt gewählt, der in einem Inertialsystem ruht. Das Zweikörperproblem ist damit im wesentlichen auf ein effektives Einkörperproblem reduziert.

Im allgemeinen lassen sich die Bewegungsgleichungen wegen der radialsymmetrischen potentiellen Energie $V(r)$ nur in Kugelkoordinaten separieren. Die Lagrange-Funktion lautet dann:

$$L_B = \frac{m}{2}\,(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + r^2\sin^2\!\vartheta\,\dot{\varphi}^2) - V(r)\ .$$

Aus der Erhaltung des Drehimpulses folgt aber, daß die Bewegung in einer zu $\mathbf{L}$ senkrechten Ebene vor sich geht. Wählt man diese als xy-Ebene, so verschwinden L_x und L_y, und es gilt

$$L_z = L\ .$$

Wegen $\vartheta \equiv \pi/2$ sind dann nur noch die Koordinaten r und φ variabel, und die Lagrange-Funktion wird

$$L_B = \frac{m}{2}\,(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - V(r)\ .$$

Die Zahl der Freiheitsgrade verringert sich damit auf $s=2$, gleichzeitig aber auch die der Bewegungsintegrale auf E und L.

Im schon erwähnten Sonderfall des isotropen harmonischen Oszillators mit der potentiellen Energie

$$V(r) = \frac{k}{2}\,r^2 = \frac{k}{2}\,(x^2 + y^2)$$

ist die Rechnung in kartesischen Koordinaten einfacher. Die Lagrange-Funktion

$$L_B = \frac{m}{2}\,(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{k}{2}\,(x^2 + y^2)$$

läßt sich umordnen zu

$$L_B = \left(\frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{k}{2}x^2\right) + \left(\frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{k}{2}y^2\right)$$

und beschreibt zwei getrennte Teilsysteme von linearen harmonischen Oszillatoren. Die Bewegungsgleichungen lauten:

$$m\,\ddot{x} = -\,k\,x \quad , \quad m\,\ddot{y} = -\,k\,y$$

und haben die ersten Integrale (Erhaltungsgrößen)

$$E_x = \frac{m}{2}\,\dot{x}^2 + \frac{k}{2}\,x^2 \quad , \quad E_y = \frac{m}{2}\,\dot{y}^2 + \frac{k}{2}\,y^2\ .$$

Mit der Abkürzung $\omega^2 = k/m$ ergeben sich die Lösungen

$$x = \tilde{a}\cos(\omega t + \alpha) \quad , \quad y = \tilde{b}\cos(\omega t + \beta)\ ,$$

die an die Anfangswerte $x(0), \dot{x}(0), y(0), \dot{y}(0)$ angepaßt werden können.

Die Bahnkurve ist eine Mittelpunktsellipse mit den Halbachsen a und b, die um einen Winkel φ_0 gegen die x-Achse gedreht ist. Im ebenfalls gedrehten Koordinatensystem $\bar{x}, \bar{y}$ gilt dann

$$\bar{x} = a\cos(\omega t) \quad , \quad \bar{y} = b\sin(\omega t)\ .$$

Durch Einsetzen von $x(t)$ und $y(t)$ ergibt sich sofort

$$E_x = \frac{k}{2}\,\tilde{a}^2 \quad , \quad E_y = \frac{k}{2}\,\tilde{b}^2\ .$$

Zu diesen Erhaltungsgrößen kommen noch

$$\begin{aligned} E &= \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{k}{2}(x^2 + y^2) = \frac{k}{2}(\tilde{a}^2 + \tilde{b}^2) = \frac{k}{2}(a^2 + b^2) \\ L &= m(x\dot{y} - y\dot{x}) = \sqrt{km}\,\tilde{a}\tilde{b}\,\cos(\beta - \alpha) = \sqrt{km}\,ab \end{aligned}$$

und, wie man durch Bilden der totalen Ableitung und Einsetzen der Bewegungsgleichungen leicht verifiziert,

$$A = m\,\dot{x}\dot{y} + k\,xy = k\,\tilde{a}\tilde{b}\,\sin(\beta - \alpha)\ ,$$

hinzu. Da es bei einem System von s Freiheitsgraden maximal $2s - 1$ unabhängige Erhaltungsgrößen geben kann, müssen zwischen E_x, E_y, E, L, A zwei Beziehungen bestehen. Sie lauten:

$$\begin{aligned} E_x + E_y &= E \\ 4\,E_x E_y - A^2 &= \frac{k}{m}\,L^2\ . \end{aligned}$$

Wählt man als unabhängige Erhaltungsgrößen E_x, E_y und A, so ergibt sich aus ihnen durch Elimination von $\dot{x}$ und $\dot{y}$ ohne Integration als Bahnkurve

$$E_y\,x^2 + E_x\,y^2 - A\,xy = \frac{1}{2k}(4\,E_x E_y - A^2)\ ,$$

also wieder die gedrehte Mittelpunktsellipse. Benutzt man dagegen E, L und A, so erhält man daraus Form und Lage der Ellipse:

$$a = \left[\frac{E}{k} + \sqrt{\frac{E^2}{k^2} - \frac{L^2}{mk}}\right]^{1/2}\ ,\ b = \left[\frac{E}{k} - \sqrt{\frac{E^2}{k^2} - \frac{L^2}{mk}}\right]^{1/2}\ ,\ \ \sin(2\varphi_0) = A\left[E^2 - \frac{L^2 k}{m}\right]^{-1/2}\ .$$

Durch Integration der Bewegungsgleichungen in Kugelkoordinaten ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{m}{2}\,(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + V(r) &= E \\ mr^2\dot{\varphi} &= L\ . \end{aligned}$$

Aus der zweiten Beziehung, die die Drehimpulserhaltung beschreibt, folgt das 2. Kepler-Gesetz: Der Fahrstrahl ("radius vector") überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

Die Elimination von $\dot{\varphi}$ im Energieintegral führt zu

$$\frac{m}{2}\Big[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{L^2}{m^2r^2}\Big] + V(r) = E\ .$$

Diese Differentialgleichung 1. Ordnung für $r(t)$ läßt sich durch Trennung der Variablen integrieren, und es folgt:

$$t - t_0 = \int\limits_{r_0}^{r} \Big\{\frac{2}{m}[E - V(r)] - \frac{L^2}{m^2r^2}\Big\}^{-1/2} dr\ .$$

Das Problem ist damit durch Zurückführung auf eine Quadratur gelöst. Im Prinzip ergibt sich weiter durch Auflösen nach $r(t)$ und Einsetzen in den Flächensatz:

$$\varphi - \varphi_0 = \int\limits_{t_0}^{t} \frac{L}{m\,r^2(t)}\,dt\ ,$$

so daß auch die Bewegung in φ durch eine Quadratur dargestellt wird. Durch Elimination des Parameters t aus $r(t)$ und $\varphi(t)$ erhält man schließlich die Bahnkurve $r(\varphi)$ in Polarkoordinaten.

Eine explizite Berechnung der Funktionen $r(t), \varphi(t)$ und $r(\varphi)$ ist natürlich erst nach Festlegung der Potentialfunktion $V(r)$ möglich, doch kann man aus dem Energieintegral

$$\frac{m}{2}\,\dot{r}^2 + \Big[V(r) + \frac{L^2}{2mr^2}\Big] = E$$

bereits weitgehende Erkenntnisse über den Bewegungsablauf gewinnen. Diese Gleichung ist formal identisch mit der für die Bewegung eines Massenpunktes der Masse m in einem effektiven Potentialfeld:

$$V_e(r) = V(r) + \frac{L^2}{2mr^2}$$

mit dem "Zentrifugalpotential" $L^2/2mr^2$, das für $L \neq 0$ das Verhalten bei kleinen r dominiert, wenn $r^2\,V(r)$ für $r \to 0$ verschwindet, was hier vorausgesetzt wird.

Falls $V(r)$ für $r \to \infty$ verschwindet, sind je nach Größe der Energie E verschiedene radiale Bewegungstypen möglich (Fig. B2):

a) $E > 0$:
Aus dem Unendlichen kommend nähert sich der Massenpunkt dem Zentrum bis zu einem minimalen Abstand r_a und läuft dann mit endlicher Restgeschwindigkeit wieder ins Unendliche.

b) $E = 0$:
Der Bewegungsablauf ist ähnlich, nur verschwindet die Restgeschwindigkeit.

c) $E < 0$:
Es handelt sich um eine periodische Bewegung in r zwischen einem minimalen (r_a) und einem maximalen (r_b) Abstand vom Zentrum, solange E größer ist als der Wert des Potentialmimimums, andernfalls hat das Problem keine Lösung.

Im Fall c) ist die radiale Schwingungsdauer

$$T_r = 2\int\limits_{r_a}^{r_b} \Big\{\frac{2}{m}[E - V(r)] - \frac{L^2}{m^2r^2}\Big\}^{-1/2} dr \ .$$

In dieser Zeit ändert sich φ ("Vorrücken des Perihels") monoton um

$$\Delta\varphi = 2\,\frac{L}{m}\int\limits_{t_a}^{t_b} r^{-2}(t)\,dt \ ,$$

denn der Integrand ist stets positiv. In der Regel ist aber $\Delta\varphi \neq 2\pi$, dann ist die Periode T_φ der φ-Bewegung verschieden von T_r. Die Bahnkurve schließt sich nur, wenn T_r und T_φ in einem rationalen Verhältnis stehen. Sie läßt sich auch ohne Kenntnis von $r(t)$ durch Variablenwechsel $t \leftrightarrow r$ bestimmen:

$$\varphi - \varphi_0 = \int\limits_{r_0}^{r} \Big\{\frac{2mr^4}{L^2}\,[E - V(r)] - r^2\Big\}^{-1/2} dr \ .$$

Häufig ist es bequemer, $s = 1/r$ als Variable zu benutzen:

$$\varphi - \varphi_0 = -\int\limits_{s_0}^{s} \Big\{\frac{2m}{L^2}\,[E - V(\frac{1}{s})] - s^2\Big\}^{-1/2} ds \ .$$

Die Auswertung des Integrals ergibt $\varphi(s)$, daraus folgt sofort $\varphi(r)$ und, wenn die explizite Auflösung möglich ist, $r(\varphi)$.

Das Kepler-Problem

In diesem Sonderfall ist die potentielle Energie:

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r} \quad , \quad \alpha = Gm_1m_2 \ .$$

Für die Bahnkurve ergibt sich wie oben:

$$\begin{aligned}\varphi_0 - \varphi &= \int\limits_{s_0}^{s} \Big\{\frac{2mE}{L^2} + \frac{2m\alpha}{L^2}\, s - s^2\Big\}^{-1/2} ds \\ &= \arcsin\Big[\Big(s - \frac{m\alpha}{L^2}\Big)\Big(\frac{m^2\alpha^2}{L^4} + \frac{2mE}{L^2}\Big)^{-1/2}\Big]\Big|_{s_0}^{s} \ .\end{aligned}$$

Die beiden Nullstellen des Integranden sind:

$$s_{a,b} = \frac{m\alpha}{L^2} \pm \Big(\frac{m^2\alpha^2}{L^4} + \frac{2mE}{L^2}\Big)^{1/2} \ .$$

Wählt man als Anfangsbedingung $s_0 = s_a$, so erhält man:

$$s = \frac{m\alpha}{L^2}\Big[1 + \Big(1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}\Big)^{1/2} \sin(\varphi_0 + \frac{\pi}{2} - \varphi)\Big] \ .$$

oder, wegen $\sin(\pi/2 - \beta) = \cos\beta$:

$$r(\varphi) = \frac{L^2/m\alpha}{1 + (1 + 2EL^2/m\alpha^2)^{1/2}\cos(\varphi - \varphi_0)} \ .$$

Das ist in Polarkoordinaten die Gleichung eines Kegelschnitts mit dem Parameter ("semi-latus rectum")

$$p = a\,|1 - e^2| = \frac{L^2}{m\alpha}$$

und der numerischen Exzentrizität

$$e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}} \ ,$$

dessen einer Brennpunkt mit dem Kraftzentrum im Ursprung zusammenfällt (1. Kepler-Gesetz).

Je nach dem Wert der Energie ergeben sich drei verschiedene Bahntypen (Fig. B3):

a) $E < 0 \ \rightarrow \ e < 1$ (Ellipse) mit dem Sonderfall $e = 0$ (Kreis)

b) $E = 0 \ \rightarrow \ e = 1$ (Parabel)

c) $E > 0 \ \rightarrow \ e > 1$ (Hyperbel)

Wegen $a = p/|1 - e^2| = \alpha/2|E|$ folgt für die Gesamtenergie

$$|E| = \frac{\alpha}{2a} = \frac{Gm_1m_2}{2a} \ .$$

Sie hängt also nur von der großen Halbachse der Bahn, nicht von ihrer Exzentrizität ab. Im Bohrschen Modell des Wasserstoffatoms ergibt sich entsprechend, daß die Energieniveaus nur von der Hauptquantenzahl n, nicht von der Nebenquantenzahl l, abhängen.

Für ein System mit s Freiheitsgraden sind allgemein $2s$ Integrationen erforderlich. Dabei ergeben sich unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen die Bahngleichungen:

$$q_i = f_i(\underline{q}(0), \underline{\dot{q}}(0), t)$$

und aus ihnen durch Ableitung nach der Zeit:

$$\dot{q}_i = g_i(\underline{q}(0), \underline{\dot{q}}(0), t) \ .$$

Falls es möglich ist, diese insgesamt $2s$ Gleichungen nach den $2s$ Unbekannten $q_i(0), \dot{q}_i(0)$ aufzulösen, erhält man Beziehungen der Form:

$$\begin{aligned} q_i(0) &= \varphi_i(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t) \\ \dot{q}_i(0) &= \gamma_i(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t) \ , \end{aligned}$$

also $2s$ Bewegungsintegrale, die allerdings im allgemeinen keine Erhaltungsgrößen sind, sondern die Zeit t explizit enthalten. Es gibt daher maximal $2s$ Bewegungsintegrale, deren Werte sich für eine gegebene Bahn durch die $2s$ Anfangsbedingungen ausdrücken lassen. In der Regel wird diese Maximalzahl aber nicht erreicht. Jacobi hat gezeigt, daß das N-Körper-Problem schon integrabel ist, wenn es gelingt, $2s-2$ unabhängige Bewegungsintegrale zu finden. Die beiden verbleibenden Integrationen lassen sich dann immer auf Quadraturen zurückführen.

Ein Beispiel dafür ist das Zweikörperproblem, bei dem wegen $s=6$ insgesamt zwölf Integrationen zu leisten sind. Zehn davon lassen sich durch die zehn Erhaltungssätze für ein abgeschlossenes System ersetzen, die beiden verbleibenden Differentialgleichungen 1. Ordnung haben die Form:

$$\frac{dt}{dr} = f(r) \quad , \quad \frac{d\varphi}{dr} = g(r)$$

und führen nach der Trennung der Variablen zu Quadraturen. Dabei treten die Integrationskonstanten t_0 und φ_0 auf.

Für einen Planeten, dessen Masse gegenüber der der Sonne vernachlässigbar ist, stellt diese ein raumfestes Kraftfeld dar. Wegen $s=3$ sind hier insgesamt sechs Integrationen durchzuführen, dabei werden die sechs Bahnelemente festgelegt (Fig. B4). Die beiden ersten bestimmen die Form der Bahnkurve (Ellipse):

$a \equiv$ große Halbachse
$e \equiv$ numerische Exzentrizität.

Die vier letzten beschreiben die Lage der Bahn in Raum und Zeit und sind vom gewählten Koordinatensystem abhängig:

$i \equiv$ Neigung der Bahnebene relativ zur Ekliptik
$\Omega \equiv$ Länge des aufsteigenden Knotens
$\omega \equiv$ Länge des Perihels
$t_0 \equiv$ Zeit des Periheldurchgangs.

Aus den Symmetrieigenschaften dieses Systems folgen unmittelbar die vier Erhaltungsgrößen E und L_x, L_y, L_z mit $L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$. Aus E und L^2 kann man zunächst direkt a und e erhalten:

$$a = \frac{\alpha}{2|E|} \quad , \quad e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}} \ ,$$

weiter aus L_x, L_y, L_z die Lage der Bahnebene, also i und Ω. Die beiden letzten Bahnelemente t_0 und φ_0 ergeben sich schließlich bei den beiden Quadraturen für $t(r)$ und $\varphi(r)$.

Für das Kepler-Problem läßt sich aber noch ein fünftes unabhängiges Bewegungsintegral angeben. Für den sogenannten Laplace-Runge-Lenz-Vektor (LRL)

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{L} - \frac{\alpha m}{r}\,\boldsymbol{r}$$

verschwindet nämlich die totale Ableitung nach der Zeit längs der Bahn:

$$\frac{d\boldsymbol{A}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} \times \boldsymbol{L} + \boldsymbol{p} \times \frac{d\boldsymbol{L}}{dt} + \frac{\alpha m}{r^2}\frac{dr}{dt}\,\boldsymbol{r} - \frac{\alpha m}{r}\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \ .$$

Es gilt aber:

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{0} \quad , \quad \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{F} = -\frac{\alpha}{r^3}\,\boldsymbol{r} \quad , \quad \boldsymbol{r}\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = r\,\frac{dr}{dt} \ .$$

Das doppelte Vektorprodukt im ersten Term von $d\boldsymbol{A}/dt$ läßt sich damit umformen:

$$-\frac{\alpha}{r^3}\,\boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{r} \times m\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}) = -\frac{\alpha m}{r^3}\,\boldsymbol{r}\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\,\boldsymbol{r} + \frac{\alpha m}{r^3}\,r^2\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \ .$$

Durch Einsetzen folgt dann:

$$\frac{d\boldsymbol{A}}{dt} = \boldsymbol{0} \ .$$

Alle drei Komponenten von $\boldsymbol{A}$ sind Bewegungsintegrale, sie sind aber nicht unabhängig von $\boldsymbol{L}$ und E, denn durch Quadrieren ergibt sich:

$$\begin{aligned} A^2 &= (\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{L})^2 - \frac{2\alpha m}{r}\,\boldsymbol{r}\cdot(\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{L}) + \alpha^2 m^2 = p^2 L^2 - 2\,\frac{\alpha m}{r} L^2 + \alpha^2 m^2 \\ &= 2m\Big(\frac{p^2}{2m} - \frac{\alpha}{r}\Big)L^2 + \alpha^2 m^2 = 2m\,E\,L^2 + \alpha^2 m^2 \ . \end{aligned}$$

Der Vektor $\boldsymbol{A}$ liegt außerdem in der Bahnebene:

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{L} = 0 \ .$$

Die drei Komponenten von $\boldsymbol{A}$ liefern also nur ein neues unabhängiges Bewegungsintegral. Das skalare Produkt von $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{r}$ ist

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{r} &= A\,r\cos(\varphi - \varphi_0) \\ &= \boldsymbol{r}\cdot(\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{L}) - \alpha m\,r = L^2 - \alpha m\,r \ , \end{aligned}$$

dabei ist φ_0 der Winkel, den $\boldsymbol{A}$ mit der Knotenlinie bildet. Durch Auflösen nach r folgt:

$$r(\varphi) = \frac{L^2/m\alpha}{1 + (A/m\alpha)\cos(\varphi - \varphi_0)} = \frac{L^2/m\alpha}{1 + (1 + 2EL^2/m\alpha^2)^{1/2}\cos(\varphi - \varphi_0)} \ .$$

Bei Hinzunahme des fünften Bewegungsintegrals ergibt sich also allein durch algebraische Operationen, ohne Integration, die Bahnkurve. Der Vektor $\boldsymbol{A}$ liegt in der Richtung zum Perihel ("Perihelvektor").

Weitere unabhängige Erhaltungsgrößen kann es nicht geben. Für die Zeitabhängigkeit von φ muß man den Flächensatz heranziehen. Bei einer vollen Periode T wird die Fläche $ab\pi$ der Ellipse überstrichen, es gilt daher:

$$\frac{1}{2}\,r^2\dot{\varphi} = \frac{L}{2m} = \frac{ab\pi}{T} = \frac{\pi a^2\sqrt{1-e^2}}{T} \ ,$$

oder nach Einsetzen für e:

$$\frac{L}{2m} = \frac{\pi L}{T}\, a^{3/2} m^{-1/2} \alpha^{-1/2} \ .$$

Daraus folgt für den Zusammenhang zwischen der großen Halbachse a und der Periode T das 3. Kepler-Gesetz:

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G}{4\pi^2}\,(m_1 + m_2) \ .$$

In seiner "Dissertatio Philosophica de Orbitis Planetarum" aus dem Jahre 1801, mit der er die Theorie Newtons widerlegt zu haben glaubte, gibt G.W.F. Hegel den folgenden "logischen Beweis" für dieses Gesetz:

"In dieser Sache findet sich noch ein Unterschied: Der Unterschied zweier Körper wird entweder tatsächlich aufgehoben oder bleibt, das heißt aus ihnen wird entweder ein realer oder ein idealer Körper. Jenes geschieht durch den freien Fall, dieses durch die Kreisbewegung. Im Fall wird einfach das Element des Quadrates durch die Summe der Zeiteinheiten oder (durch) eine Linie dargestellt, die in ein festes, aber willkürliches Maß unterteilt und in Zahlen ausgedrückt wird; bei der Kreisbewegung, durch die der ideale Körper erzeugt wird, bleibt hingegen der Unterschied zwischen den Körpern und daher auch in gewisser Hinsicht zwischen Zeit und Raum bestehen; davon bewirkt jene die Periode, diese aber die Entfernung der Körper: Doch muß man die Zeit mit dem Raum zusammenfassen, der von dem Körper durchlaufen wird und mit dem Raum der Entfernung einen Winkel bildet, und diese Synthese, die die Größe der Bewegung bewirkt, ist das Quadrat selbst. So gibt es zwei Elemente dessen, was man die Materie der Bewegung nennt und was das ganze Verhältnis zweier sich umeinander bewegender Körper ausdrückt, die Entfernungslinie und das Bewegungsquadrat: Daher wird die Größe des Ganzen, das sich aus diesen beiden Elementen zusammenfügt, der Würfel oder der Körper sein. Und weil ja die Schwere immer ein und dieselbe ist, so ist der Würfel, wie ich meine, für alle Planeten der gleiche. Daraus ergibt sich leicht jenes berühmte Gesetz von Kepler."

Es handelt sich also um bloßes Wortgeklingel und leeres Geschwätz, wie es für die idealistische Naturphilosophie von Hegel und Schelling bezeichnend ist, und Schopenhauer hat wohl recht, wenn er diese Epoche das "Zeitalter der intellektuellen Unredlichkeit" nennt. Sie findet eine würdige Nachfolgerin im heutigen "postmodernen Relativismus".

Für einen beliebigen Zeitpunkt t ergibt sich aus dem Flächensatz und der Bahnkurve die Differentialgleichung:

$$\dot{\varphi} = \frac{L}{mr^2} = \frac{m\alpha^2}{L^3}\,(1 + e\cos\varphi)^2 \ ,$$

die sich durch Trennung der Variablen lösen läßt und damit auf eine Quadratur führt:

$$\tau = \frac{m\alpha^2}{L^3}\, t = \int_0^{\varphi} (1 + e\cos\varphi)^{-2}\, d\varphi \ .$$

Die Auswertung des Integrals ergibt in den drei Fällen:

$$\begin{aligned}
e < 1 : &\quad + (1-e^2)^{-3/2} \arccos\Big(\frac{e+\cos\varphi}{1+e\cos\varphi}\Big) - \frac{1}{1-e^2}\,\frac{e\sin\varphi}{1+e\cos\varphi} \\
e = 1 : &\quad \frac{1}{2}\tan\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{6}\tan^3\frac{\varphi}{2} \\
e > 1 : &\quad - (e^2-1)^{-3/2} \operatorname{arcosh}\Big(\frac{e+\cos\varphi}{1+e\cos\varphi}\Big) + \frac{1}{e^2-1}\,\frac{e\sin\varphi}{1+e\cos\varphi} \ .
\end{aligned}$$

Außer in den Sonderfällen des Kreises ($e = 0$) mit $\varphi(t) = \tau$ und der Parabel ($e = 1$) mit

$$\varphi(t) = 2\arctan\left(\sqrt[3]{\tau + \sqrt{\tau^2+1}} + \sqrt[3]{\tau - \sqrt{\tau^2+1}}\right)$$

lassen lassen sich diese transzendenten Gleichungen nicht explizit nach $\varphi(t)$ auflösen. Für Ellipsenbahnen ($e < 1$) hat Kepler eine wesentlich einfachere Darstellung gefunden. Er betrachtet dazu den der Ellipse umbeschriebenen Kreis ("Exzenter") mit einem Ersatzpunkt Q, dessen affine Abbildung auf die Ellipse den Ort P des Planeten angibt (Fig. B5). Die Winkel relativ zur Achse der Ellipse ("Apsidenlinie") sind für P die wahre Anomalie φ und für Q die exzentrische Anomalie u. Aus geometrischen Betrachtungen ergibt sich dann als Bahnkurve:

$$r(u) = a(1 - e\cos u)$$

und als Beziehung zwischen φ und u:

$$\cos u = \frac{\cos\varphi - e}{1 + e\cos\varphi} \quad , \quad \cos\varphi = \frac{\cos u - e}{1 - e\cos u} \ .$$

Durch Ableitung nach t folgt daraus mit Hilfe des Flächensatzes:

$$\dot{u} = \frac{L}{ma^2\sqrt{1-e^2}} \frac{1}{1 - e\cos u} \ .$$

und nach Ersetzen von L durch $2\pi m a^2\sqrt{1-e^2}/T$ die Differentialgleichung für $u(t)$:

$$\frac{du}{dt} = \frac{2\pi}{T} \frac{1}{1 - e\cos u} \ .$$

Sie läßt sich wieder durch Trennung der Variablen integrieren:

$$\frac{2\pi}{T}\, t = \int\limits_0^u (1 - e\cos u)\, du \ ,$$

und es entsteht die Kepler-Gleichung

$$u - e\,\sin u = \frac{2\pi}{T}\, t \ .$$

Das ist wieder, außer im Fall der Kreisbahn ($e = 0$), eine transzendente Gleichung, die sich aber für kleine e, wie sie für die Bahnen der großen Planeten typisch sind, numerisch sehr gut iterativ lösen läßt.

Im Gegensatz zur Epizykeltheorie des Ptolemäus läßt sich die Änderung der allein beobachtbaren wahren Anomalie nicht durch einfache Zusammensetzung von trigonometrischen Termen darstellen, und eine Umrechnung auf die Erde als Bezugspunkt ist nicht mehr in geschlossener Form möglich. Für die Planeten muß, zumindest rechnerisch, immer die Sonne als Bezugspunkt eingeschaltet werden, was dazu führte, daß sich bei den Astronomen das heliozentrische Weltbild bis zur Mitte des 17. Jahrhunderts fast völlig durchsetzte.

Eine Auflösung der Kepler-Gleichung durch eine Fourier-Reihe wurde zu Beginn des 19. Jahrhunderts durch Bessel gegeben. Aus dem Ansatz

$$u(t) = \frac{2\pi}{T}\, t + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\frac{2\pi}{T} t)$$

folgt durch Ableitung nach t

$$\frac{du}{dt} = \frac{2\pi}{T}\,[1 + \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n \cos(n\frac{2\pi}{T} t)]$$

und daraus in der üblichen Weise für die Fourier-Koeffizienten a_n:

$$\begin{aligned}
n\,a_n &= \frac{T}{2\pi}\frac{2}{T}\int\limits_0^T \left(\frac{du}{dt}-\frac{2\pi}{T}\right)\cos(n\frac{2\pi}{T}t)\,dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^T \cos(n\frac{2\pi}{T}t)\,\frac{du}{dt}\,dt = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \cos[n(u-e\sin u)]\,du \ .
\end{aligned}$$

Die Besselfunktionen 1. Art werden definiert durch

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \cos(nu - x\sin u)\,du \ ,$$

für die Koeffizienten a_n folgt damit

$$a_n = \frac{2}{n}\,J_n(ne)$$

und als Auflösung der Kepler-Gleichung schließlich:

$$u(t) = \frac{2\pi}{T}\,t + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_n(ne)}{n}\sin(n\frac{2\pi}{T}t) \ .$$

Durch Einsetzen von $\varphi(t)$ in die Bahngleichung $r(\varphi)$ ergibt sich ein sehr unübersichtlicher Ausdruck für $r(t)$. Besser geht man aus vom Energieintegral

$$\frac{m}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{L^2}{m^2r^2} - \frac{\alpha}{r} = E$$

Aus dieser Differentialgleichung 1. Ordnung für $r(t)$ erhält man zunächst $t(r)$:

$$t = \int\limits_{a(1-e)}^{r} \left\{\frac{2}{m}[E+\frac{\alpha}{r}] - \frac{L^2}{m^2r^2}\right\}^{1/2} dr \ .$$

Die Auswertung des Integrals ergibt für $\tau = t\,m\alpha^2/L^3$ in den drei Fällen:

$$\begin{aligned}
e<1: &\quad + (1-e^2)^{3/2}\{\arccos[\frac{1}{e}(1-\frac{r}{a})] - [e^2-(1-\frac{r}{a})^2]^{1/2}\} \\
e=1: &\quad \frac{1}{3}\Big(\frac{m\alpha\,r}{L^2}+1\Big)\Big(\frac{m\alpha\,r}{L^2}-\frac{1}{2}\Big)^{1/2} \\
e>1: &\quad - (e^2-1)^{3/2}\,\{\operatorname{arcosh}[\frac{1}{e}(1+\frac{r}{a})] - [(1+\frac{r}{a})^2-e^2\,]^{1/2}\} \ .
\end{aligned}$$

Auch $r(t)$ läßt sich mit Hilfe von Fourier-Reihen darstellen, auf die hier aber nicht eingegangen werden soll.

Die Koordinaten r und φ beschreiben die relative Bewegung der Massenpunkte m_1 und m_2 umeinander, ihre absoluten Bahnen erhält man daraus durch Multiplikation mit den Maßstabsfaktoren $m_2/(m_1+m_2)$ und $m_1/(m_1+m_2)$ (Fig. B6).

Damit ist das Zweikörperproblem im engeren Sinne vollständig gelöst. Es zeichnet sich dadurch aus, daß radiale und azimuthale Periode T_r und T_φ übereinstimmen und die Bahnkurve daher geschlossen ist.

Das gilt auch für den isotropen harmonischen Oszillator mit der potentiellen Energie

$$V(r) = \frac{k}{2}\,r^2 \ .$$

Aus der allgemeinen Beziehung für die Bahnkurve folgt hier mit der neuen Variablen $v = 1/r^2$:

$$\begin{aligned} \varphi - \varphi_0 &= -\frac{1}{2} \int\limits_{v_0}^{v} \left[\frac{2m}{L^2} \Big(E\, v - \frac{k}{2} \Big) - v^2 \right]^{-1/2} dv \\ &= -\frac{1}{2} \arccos \left[\Big(\frac{mE}{L^2} - v \Big) \Big(\frac{m^2 E^2}{L^4} - \frac{km}{L^2} \Big)^{-1/2} \right] \Bigg|_{v_0}^{v} . \end{aligned}$$

Die beiden Nullstellen der Wurzel im Integranden sind

$$v_{a,b} = \frac{mE}{L^2} \pm \sqrt{\frac{m^2 E^2}{L^4} - \frac{km}{L^2}} \; .$$

Wählt man als Anfangsbedingung $v_0 = v_b$, so ergibt sich:

$$r(\varphi) = \left\{ \frac{mE}{L^2} - \sqrt{\frac{m^2 E^2}{l^4} - \frac{km}{L^2}} \cos[2(\varphi - \varphi_0)] \right\}^{-1/2} .$$

Das ist eine Mittelpunktsellipse mit den Halbachsen

$$a = \left[\frac{mE}{L^2} - \sqrt{\frac{m^2 E^2}{L^4} - \frac{km}{L^2}} \right]^{-1/2} \quad , \quad b = \left[\frac{mE}{L^2} + \sqrt{\frac{m^2 E^2}{L^4} - \frac{km}{L^2}} \right]^{-1/2} ,$$

die gegen die x-Achse um den Winkel φ_0 gedreht ist. Die Zeitabhängigkeit von r folgt aus

$$\begin{aligned} t &= -\int\limits_{r_0}^{r} \left[\frac{2}{m} \Big(E - \frac{k}{2} r^2 \Big) - \frac{L^2}{mr^2} \right]^{-1/2} dr \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m}{k}} \arccos \left[\Big(r^2 - \frac{E}{k} \Big) \Big(\frac{E^2}{k^2} - \frac{L^2}{km} \Big)^{-1/2} \right] \Bigg|_{r_0}^{r} . \end{aligned}$$

Die beiden Nullstellen der Wurzel im Integranden sind die Halbachsen

$$a = \left[\frac{E}{k} + \sqrt{\frac{E^2}{k^2} - \frac{L^2}{km}} \right]^{1/2} \quad , \quad b = \left[\frac{E}{k} - \sqrt{\frac{E^2}{k^2} - \frac{L^2}{km}} \right]^{1/2} ,$$

was mit den obigen Werten übereinstimmt. Wählt man $r_0 = a$, so wird

$$r(t) = \left\{ \frac{E}{k} + \sqrt{\frac{E^2}{k^2} - \frac{L^2}{km}} \cos(2\omega t) \right\}^{1/2} .$$

Die Zeitabhängigkeit von φ folgt schließlich aus

$$\begin{aligned} \varphi - \varphi_0 &= \int\limits_{0}^{t} \frac{L}{mr^2(t)} dt = \frac{L}{m} \int\limits_{0}^{t} \left[\frac{E}{k} + \sqrt{\frac{E^2}{k^2} - \frac{L^2}{km}} \cos(2\omega t) \right]^{-1} dt \\ &= \arctan \left[\frac{L}{\sqrt{km}} \tan(\omega t) \Big(\frac{E}{k} + \sqrt{\frac{E^2}{k^2} - \frac{L^2}{km}} \Big)^{-1} \right] . \end{aligned}$$

Man diese Beziehungen auch mit Hilfe der Halbachsen a und b ausdrücken:

$$\begin{aligned} & r(t) = [a^2 \cos(\omega t) + b^2 \sin^2(\omega t)]^{1/2} \quad , \quad \varphi(t) = \arctan \left[\frac{b}{a} \tan(\omega t) \right] \\ & \to \quad r(\varphi) = ab\, [a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi]^{-1/2} . \end{aligned}$$

Für eine potentielle Energie der Form $V(r) = \alpha\, r^n$ sind die behandelten Fälle $n = 2$ und $n = -1$ die einzigen, für die die Bahnkurve bei gebundenen Zuständen geschlossen, die Bewegung also periodisch ist (Theorem von Bertrand).

Im Fall einer Störung, zum Beispiel durch relativistische Effekte oder eine Abplattung der Sonne, kommt zum Gravitationspotential noch ein Term proportional zu r^{-3} hinzu. Die Integrale lassen sich dann nicht mehr durch elementare Funktionen ausdrücken, sondern sind vom elliptischen Typ. Näherungsweise kann man die resultierende Periheldrehung aber auch durch ein Zusatzpotential proportional zu r^{-2} darstellen:

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2} \ .$$

Mit $s = 1/r$ ergibt sich dann für die Bahnkurve:

$$\begin{aligned}\varphi - \varphi_0 &= -\int\limits_{s_0}^{s} \left\{ \frac{2m}{L^2} \left[E + \alpha\, s - \beta\, s^2\right] - s^2 \right\}^{-1/2} ds \\ &= -\int\limits_{s_0}^{s} \left\{ \frac{2m}{L^2} \left[E + \alpha\, s\right] - \left(1 + \frac{2m\beta}{L^2}\right) s^2 \right\}^{-1/2} ds \ .\end{aligned}$$

Mit der Abkürzung $\gamma^2 = 1 + 2m\beta/L^2$ führt die Substitution $\tilde{s} = \gamma\, s \to \tilde{r} = r/\gamma$, $\tilde{\varphi} = \gamma\, \varphi$, $\tilde{\alpha} = \alpha/\gamma$ zu

$$\tilde{\varphi} - \tilde{\varphi}_0 = -\int\limits_{\tilde{s}_0}^{\tilde{s}} \left\{ \frac{2m}{L^2} \left[E + \tilde{\alpha}\, \tilde{s}\right] - \tilde{s}^2 \right\}^{-1/2} d\tilde{s} \ .$$

Das stimmt in der Form mit der Gleichung für das ungestörte Problem überein, die Gleichung der Bahnkurve ist also:

$$r(\varphi) = \frac{\gamma^2 L^2/m\alpha}{1 + (1 + 2E\gamma^2 L^2/m\alpha^2)^{1/2} \cos[\gamma(\varphi - \varphi_0)]} \ .$$

Bei einem Umlauf von Perihel zu Perihel in der Zeit T_r dreht sich die Apsidenlinie dann um

$$\Delta\varphi = 2\pi\left(\frac{1}{\gamma} - 1\right) \approx -2\pi \frac{m\beta}{L^2} \ .$$

Im Gegensatz zur r-Bewegung ist die φ-Bewegung aber nicht periodisch; die Zeit, in der φ um 2π anwächst, ist von Umlauf zu Umlauf verschieden. Ihr Mittelwert über viele Perioden ist $T_\varphi = \gamma\, T_r$.

Für das Dreikörperproblem lautet die Lagrange-Funktion

$$L = \frac{m_1}{2}\, \boldsymbol{v}_1^2 + \frac{m_2}{2}\, \boldsymbol{v}_2^2 + \frac{m_3}{2}\, \boldsymbol{v}_3^2 + \frac{Gm_1m_2}{|\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1|} + \frac{Gm_2m_3}{|\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_2|} + \frac{Gm_3m_1}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_3|} \ .$$

Entsprechend der Zahl der Freiheitsgrade ($s = 9$) sind insgesamt achtzehn Integrationen durchzuführen. Auch hier stehen die zehn Bewegungsintegrale für ein abgeschlossenes System zur Verfügung. Bei Kenntnis von $2s{-}2 = 16$ Bewegungsintegralen wäre das Problem integrabel, ließe sich also auf Quadraturen reduzieren. Bruns hat aber gezeigt, daß keine weiteren Bewegungsintegrale als eindeutige Funktionen von $q_i, \dot{q}_i$ und t existieren, das Dreikörperproblem ist also im allgemeinen Fall nicht integrabel.

Einen wichtigen Sonderfall stellt das eingeschränkte Dreikörperproblem ("problème restreint") dar, bei dem zwei große Massen M_1 und M_2 in einer Ebene mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um ihren Massenmittelpunkt rotieren. Ein dritter Körper mit der Masse m, die gegenüber M_1, M_2 vernachlässigbar klein ist, bewegt sich in diesem zeitlich veränderlichen Kraftfeld. Für ihn gelten daher nicht mehr die Erhaltungssätze für ein abgeschlossenes System. Betrachtet man aber seine Bewegung in Bezug auf ein mitrotierendes Koordinatensystem, so ist in diesem das Kraftfeld zeitlich konstant:

$$\boldsymbol{F} = -\nabla V(x, y).$$

Die Transformation auf das Inertialsystem wird gegeben durch

$$\begin{aligned}\bar{x} &= x\cos(\omega t) - y\sin(\omega t) \\ \bar{y} &= x\sin(\omega t) + y\cos(\omega t) \ .\end{aligned}$$

In diesem ist die Lagrange-Funktion

$$L_B = \frac{m}{2}\,(\dot{\bar{x}}^2 + \dot{\bar{y}}^2) - V(\bar{x}\cos(\omega t) + \bar{y}\sin(\omega t), -\bar{x}\sin(\omega t) + \bar{y}\cos(\omega t)) \ ,$$

die potentielle Energie und damit das Kraftfeld sind also zeitabhängig, und Energie und Drehimpuls bleiben nicht erhalten. Im rotierenden System gilt dagegen:

$$L_B = \frac{m}{2}\,(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + m\omega\,(x\dot{y} - y\dot{x}) + \frac{m}{2}\omega^2(x^2 + y^2) - V(x,y) \ .$$

Die Bewegungsgleichungen (Lagrange-Gleichungen) lauten dann wie vorher:

$$\begin{aligned} m\,\ddot{x} - 2m\omega\,\dot{y} - m\omega^2\,x + \frac{\partial V}{\partial x} &= 0 \\ m\,\ddot{y} + 2m\omega\,\dot{x} - m\omega^2\,y + \frac{\partial V}{\partial y} &= 0 \ . \end{aligned}$$

Da die Lagrange-Funktion hier nicht explizit von der Zeit abhängt, ist die Hamilton-Funktion

$$H = \frac{m}{2}\,(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{m}{2}\,\omega^2(x^2 + y^2) + V(x,y)$$

ein Bewegungsintegral (Jacobi-Integral), stimmt aber nicht mit der Energie

$$\begin{aligned} E &= \frac{m}{2}\,(\dot{\bar{x}}^2 + \dot{\bar{y}}^2) + V(\bar{x}\cos(\omega t) + \bar{y}\sin(\omega t), -\bar{x}\sin(\omega t) + \bar{y}\cos(\omega t)) \\ &= \frac{m}{2}\,(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + m\omega\,(x\dot{y} - y\dot{x}) + \frac{m}{2}\,\omega^2(x^2 + y^2) + V(x,y) \ . \end{aligned}$$

überein, da die kinetische Energie und damit die Lagrange-Funktion nicht homogen-quadratisch in $\dot{x}, \dot{y}$ ist. Man kann leicht zeigen, daß

$$H = E - \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{L} \ .$$

Die Rechnung vereinfacht sich in Polarkoordinaten r, φ erheblich. Die Transformation zwischen den Bezugssystemen lautet dann

$$\bar{r} = r \quad , \quad \bar{\varphi} = \varphi + \omega\,t \ .$$

Damit ensteht aus der Lagrange-Funktion im Inertialsystem

$$L_B = \frac{m}{2}(\dot{\bar{r}}^2 + \bar{r}^2\dot{\bar{\varphi}}^2) - V(\bar{r}, \bar{\varphi} + \omega\,t)$$

als Darstellung im rotierenden System

$$L_B = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + m\omega\,r^2\dot{\varphi} + \frac{m}{2}\omega^2 r^2 - V(r,\varphi) \ ,$$

woraus die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} m\,\ddot{r} - m\,r\,\dot{\varphi}^2 - 2m\omega\,r\,\dot{\varphi} - m\omega^2\,r + \frac{\partial V}{\partial r} &= 0 \\ mr^2\ddot{\varphi} + 2mr\dot{r}\dot{\varphi} + 2m\omega\,r\dot{r} + \frac{\partial V}{\partial \varphi} &= 0 \end{aligned}$$

folgen. Die Hamilton-Funktion ergibt sich zu

$$H = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - \frac{m}{2}\omega^2 r^2 + V(r,\varphi)$$

und unterscheidet sich um

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{L} = m\omega\,\bar{r}^2\dot{\bar{\varphi}} = m\omega\,r^2(\dot{\varphi} + \omega)$$

von der Energie

$$E = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + m\omega\,r^2\dot{\varphi} + \frac{m}{2}\omega^2 r^2 + V(r,\varphi)$$

Da das Kraftfeld hier durch ein Zweizentrenpotential beschrieben wird, gibt es wegen der fehlenden Symmetrie auch in diesem Fall keine weiteren Bewegungsintegrale, das eingeschränkte Dreikörperproblem ist also ebenfalls nicht integrabel. Es existieren aber spezielle Lösungen der Bewegungsgleichungen, nämlich (maximal) fünf Punkte, die Lagrange-Punkte L_1 bis L_5, in denen sich der Massenpunkt im Gleichgewicht zwischen Gravitations- und Zentrifugalkraft befindet (Fig. B7). Von ihnen sind L_1 bis L_3, die auf der Verbindungslinie der beiden großen Massen liegen, instabil, dagegen L_4 und L_5 stabil.

Wie schon früher erwähnt wurde, besteht bei nichtintegrablen nichtlinearen Systemen für gewisse Bereiche der Parameter die Möglichkeit chaotischen Verhaltens. Im Sonnensystem kommt es dazu zum Beispiel bei der Bewegung von Kleinplaneten oder Kometen im vereinigten Feld von Sonne und Jupiter.

Newton war der Meinung, daß entsprechendes auch für die großen Planeten gelte und es deshalb erforderlich sei, daß Gott in Zeiträumen von einigen tausend Jahren das Sonnensystem wieder in einen geordneten Zustand versetzt ("das Uhrwerk aufzieht"). Laplace zeigte dagegen 1773, daß die Bahnen der großen Körper im Sonnensystem zumindest über Zeiträume von Millionen von Jahren stabil sind. Als er von Napoleon gefragt wurde, warum er im Gegensatz zu Newton in seinem Hauptwerk "Exposition du système du monde" den Schöpfer nicht erwähne, antwortete er: "Sire, je n'avais plus besoin de cette hypothèse-là!".

4. Der starre Körper

Als starren Körper, oft auch Kreisel genannt, bezeichnet man ein System von N Massenpunkten, deren wechselseitige Abstände unveränderlich sind. Die ursprüngliche Anzahl von $3N$ Freiheitsgraden verringert sich dadurch um die Zahl der Zwangsbedingungen. Bei N Massenpunkten gibt es $N(N-1)/2$ Abstände, doch sind diese für $N > 3$ nicht unabhängig voneinander. Jeder hinzugefügte Massenpunkt bringt drei zusätzliche Freiheitsgrade ein, erhöht aber gleichzeitig auch die Zahl der unabhängigen Zwangsbedingungen um drei, so daß bei $N \geq 3$ für das System $s = 6$ gilt. Eine Ausnahme bildet der Fall der kollinearen Anordnung, zu dem auch der Körper mit $N = 2$ gehört. Für ihn ist $s = 5$. Es existieren keine starren Körper mit vier Freiheitsgraden, daher ist es zum Beispiel nicht möglich, für ein Elektron mit Spin ein klassisches Modell anzugeben.

a) Kinematik

Für $N > 2$ ist die Aufstellung von Bewegungsgleichungen für die einzelnen Massenpunkte unter Berücksichtigung der Zwangskräfte (Lagrange-Gleichungen 1. Art) nicht mehr praktikabel. Man beschreibt dann das System zweckmäßig durch eine Lagrange-Funktion, die von sechs, bei kollinearen Anordnungen von fünf, generalisierten Koordinaten q_i abhängt. Als solche kommen in Betracht zunächst die kartesischen Koordinaten $X, Y, Z \mathrel{\hat{=}} q_1, q_2, q_3$ des Massenmittelpunktes. Nach einem Theorem von Euler ist die allgemeinste Bewegung eines starren Körpers, von dem ein Punkt festgehalten wird, eine Drehung um eine wohldefinierte Achse durch diesen Punkt um einen wohldefinierten Drehwinkel ψ. Zum Beweis betrachtet man die relativen Lagen eines im Körper festen Dreibeins vor $(\bar{\boldsymbol{e}}_1, \bar{\boldsymbol{e}}_2, \bar{\boldsymbol{e}}_3)$ und nach $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ der Bewegung. Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_1 &= D_{11}\,\bar{\boldsymbol{e}}_1 + D_{12}\,\bar{\boldsymbol{e}}_2 + D_{13}\,\bar{\boldsymbol{e}}_3 \\
\boldsymbol{e}_2 &= D_{21}\,\bar{\boldsymbol{e}}_1 + D_{22}\,\bar{\boldsymbol{e}}_2 + D_{23}\,\bar{\boldsymbol{e}}_3 \\
\boldsymbol{e}_3 &= D_{31}\,\bar{\boldsymbol{e}}_1 + D_{32}\,\bar{\boldsymbol{e}}_2 + D_{33}\,\bar{\boldsymbol{e}}_3 \;.
\end{aligned}
$$

Da es sich bei dieser Transformation um eine Bewegung handelt, bei der das Skalarprodukt von Vektoren erhalten bleibt, muß ihre Matrix orthonormal sein. Die Drehachse ergibt sich daraus, daß Vektoren in der durch sie festgelegten Richtung ungeändert bleiben, also Eigenvektoren der Matrix zum Eigenwert $+1$ sind. Den Drehwinkel ψ erhält man am einfachsten aus der Tatsache, daß die Spur einer Matrix bei einer Drehung des Koordinatensystems invariant ist. Wählt man ein System, dessen z-Achse mit dem obigen Eigenvektor zusammenfällt, so ist in diesem:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_1 &= +\bar{\boldsymbol{e}}_1 \cos\psi + \bar{\boldsymbol{e}}_2 \sin\psi \\
\boldsymbol{e}_2 &= -\bar{\boldsymbol{e}}_1 \sin\psi + \bar{\boldsymbol{e}}_2 \cos\psi \\
\boldsymbol{e}_3 &= \quad \bar{\boldsymbol{e}}_3 \;.
\end{aligned}
$$

Für die Spur der Drehmatrix folgt daraus:

$$D_{11} + D_{22} + D_{33} = 2\cos\psi + 1 \quad \rightarrow \quad \cos\psi = \tfrac{1}{2}\left(D_{11} + D_{22} + D_{33} - 1\right) \; .$$

Beschreibt man die Lage der Drehachse im ursprünglichen Koordinatensystem durch ihre Richtungswinkel φ und ϑ, so wird die Drehung festgelegt durch die drei Euler-Winkel $\varphi, \vartheta, \psi \mathrel{\hat{=}} q_4, q_5, q_6$.

b) Dynamik

Aus den allgemeinen Erörterungen des ersten Kapitels über die Bewegung von Systemen von Massenpunkten folgt, daß sich die Translationsbewegung des Massenmittelpunktes und die Rotationsbewegung um ihn herum weitgehend trennen lassen. Für die kinetische Energie des Systems gilt:

$$T = T_t + T_r$$

mit der Translationsenergie

$$T_t = \frac{M}{2}\,(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2) \; .$$

Die potentielle Energie läßt sich zerlegen in die der inneren Wechselwirkung $V^{(i)}$ und die der Wechselwirkung mit der Umgebung $V^{(e)}$:

$$V = V^{(i)} + V^{(e)} \; ,$$

doch spielt die erstere beim starren Körper keine Rolle, da sie zeitlich unveränderlich ist, und wird im folgenden weggelassen. Aus der Lagrange-Funktion dieses Systems mit sechs Freiheitsgraden folgen dann als Lagrange-Gleichungen 2. Art die schon früher betrachteten Beziehungen:

$$\frac{d\boldsymbol{P}}{dt} = \boldsymbol{F} \qquad (q_1, q_2, q_3 \mathrel{\hat{=}} X, Y, Z)$$

für die Bewegung des Massenmittelpunktes und

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{N} \qquad (q_4, q_5, q_6 \mathrel{\hat{=}} \varphi, \vartheta, \psi)$$

für die Rotation um diesen Punkt herum, dabei ist $\mathbf{F}$ die äußere Kraft und $\mathbf{N}$ das äußere Drehmoment.

Die kinetische Energie der Rotation um den Massenmittelpunkt ist

$$T_r = \tfrac{1}{2}\sum_k m_k \boldsymbol{v}_k^2 \; ,$$

wobei für die Rotationsgeschwindigkeit des k. Massenpunkts gilt

$$\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_k \; .$$

Die Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ ist für alle Massenpunkte des starren Körpers die gleiche. Für den Drehimpuls ergibt sich dann

$$\begin{aligned} \boldsymbol{L} &= \sum_k m_k\, \boldsymbol{r}_k \times \boldsymbol{v}_k = \sum_k m_k\, \boldsymbol{r}_k \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_k) \\ &= \sum_k m_k [\, r_k^2\, \boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{r}_k \cdot \boldsymbol{\omega})\, \boldsymbol{r}_k] \; . \end{aligned}$$

Andererseits gilt für das Quadrat der Geschwindigkeit:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_k^2 &= (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_k)^2 = (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_k) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_k) \\ &= \boldsymbol{v}_k \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_k) = \boldsymbol{\omega} \cdot (\boldsymbol{r}_k \times \boldsymbol{v}_k) \\ &= \boldsymbol{\omega} \cdot [\boldsymbol{r}_k \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_k)] \end{aligned}$$

und damit für die kinetische Energie der Rotation

$$T_r = \tfrac{1}{2}\,\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{L} \ .$$

Unter Benutzung des dyadischen (tensoriellen) Produkts von zwei Vektoren läßt sich aber schreiben

$$(\boldsymbol{r}_k \cdot \boldsymbol{\omega})\,\boldsymbol{r}_k = \boldsymbol{r}_k\,(\boldsymbol{r}_k \cdot \boldsymbol{\omega}) = (\boldsymbol{r}_k \boldsymbol{r}_k) \cdot \boldsymbol{\omega}$$

und damit für den Drehimpuls

$$\boldsymbol{L} = \{\sum_k m_k [r_k^2\,\mathbf{1} - (\boldsymbol{r}_k \boldsymbol{r}_k)]\} \cdot \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\Theta} \cdot \boldsymbol{\omega} \ .$$

Er ist also das skalare Produkt aus der durch den Aufbau des Körpers festgelegten Trägheitsdyade $\boldsymbol{\Theta}$

$$\boldsymbol{\Theta} = \sum_k m_k [r_k^2\,\mathbf{1} - (\boldsymbol{r}_k \boldsymbol{r}_k)]$$

und der variablen Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$. Für die kinetische Energie der Rotation ergibt sich damit

$$T_r = \tfrac{1}{2}\,\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\Theta} \cdot \boldsymbol{\omega} \ .$$

In einem bestimmten Koordinatensystem wird $\boldsymbol{\Theta}$ dargestellt durch eine Matrix $\tilde{\Theta}$:

$$\tilde{\Theta} = \begin{pmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} & \Theta_{13} \\ \Theta_{21} & \Theta_{22} & \Theta_{23} \\ \Theta_{31} & \Theta_{32} & \Theta_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_k m_k (y_k^2 + z_k^2) & -\sum_k m_k x_k y_k & -\sum_k m_k x_k z_k \\ -\sum_k m_k y_k x_k & \sum_k m_k (z_k^2 + x_k^2) & -\sum_k m_k y_k z_k \\ -\sum_k m_k z_k x_k & -\sum_k m_k z_k y_k & \sum_k m_k (x_k^2 + y_k^2) \end{pmatrix} ,$$

deren Nichtdiagonalelemente als Deviationsmomente bezeichnet werden. Bei einer Drehung des Koordinatensystems mit der Matrix $\tilde{D}$ geht $\tilde{\Theta}$ über in $\tilde{\Theta}'$:

$$\tilde{r}' = \tilde{D}\,\tilde{r} \quad \rightarrow \quad \tilde{\Theta}' = \tilde{D}\,\tilde{\Theta}\,\tilde{D}^{-1}$$

(Ähnlichkeitstransformation). Da die Matrix $\tilde{\Theta}$ reell und symmetrisch ist ($\Theta_{ij} = \Theta_{ji}$), kann sie durch eine solche Transformation auf Diagonalgestalt gebracht werden:

$$\boldsymbol{\Theta} \mathrel{\hat{=}} \begin{pmatrix} \Theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_3 \end{pmatrix} .$$

Die neuen Koordinatenachsen, die mit den Richtungen der Eigenvektoren der Matrix übereinstimmen, heißen Hauptachsen oder Hauptträgheitsachsen, die Diagonalelemente Θ_i (≥ 0) Hauptträgheitsmomente.

In Bezug auf das raumfeste Inertialsystem sind die Koordinaten x_k, y_k, z_k Funktionen der Zeit, das gleiche gilt für die Elemente Θ_{ij} der Trägheitsdyade und damit auch für die Richtung der Hauptachsen. Die Hauptträgheitsmomente Θ_i beziehen sich dagegen auf das körperfeste System und hängen nicht von der Zeit ab. Für ein System von N Massenpunkten ergeben sie sich zu

$$\Theta_i = \sum_{k=1}^{N} m_k\, r_k^2 \ ,$$

dabei ist r_k der Abstand des k. Massenpunktes von der betrachteten Hauptachse. Ein Erweiterung auf kontinuierliche Massenverteilungen $\rho(\mathbf{r})$ ist ohne weiteres möglich und führt zum Beispiel zu:

$$\Theta_3 = \int\!\!\int\!\!\int \rho(x,y,z)(x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$$

mit analogen Ausdrüchen für Θ_1 und Θ_2. Dabei können drei Fälle auftreten:

1) $\Theta_1 = \Theta_2 = \Theta_3$ (Kugelkreisel)
In diesem Fall ist jede Achse eine Hauptträgheitsachse.

2) $\Theta_1 = \Theta_2 \neq \Theta_3$ (symmetrischer Kreisel)
In diesem Fall ist jede Achse in der xy-Ebene eine Hautträgheitsachse.

3) $\Theta_1 < \Theta_2 < \Theta_3$ (asymmetrischer Kreisel)
In diesem Fall sind die drei Hauptträgheitsachsen eindeutig festgelegt und stehen senkrecht aufeinander.

Wenn ein starrer Körper um eine festgelegte Achse (Richtung $\mathbf{e}_\alpha$) mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotiert, kann man ein effektives Trägheitsmoment Θ_α um diese Achse definieren durch:

$$\begin{aligned} T_r &= \tfrac{1}{2}\,\Theta_\alpha\,\omega^2 = \tfrac{1}{2}\sum_k m_k \boldsymbol{v}_k^2 = \frac{\omega^2}{2}\sum_k m_k(\boldsymbol{r}_k \times \boldsymbol{e}_\alpha)^2 \\ &= \frac{\omega^2}{2}\sum_k m_k[r_k^2 - (\boldsymbol{r}_k \cdot \boldsymbol{e}_\alpha)^2] \\ &= \tfrac{1}{2}\,\omega^2\,\boldsymbol{e}_\alpha \cdot \boldsymbol{\Theta} \cdot \boldsymbol{e}_\alpha \ . \end{aligned}$$

Durch Vergleich ergibt sich:

$$\Theta_\alpha = \mathbf{e}_\alpha \cdot \boldsymbol{\Theta} \cdot \mathbf{e}_\alpha \ ,$$

aus dem Trägheitstensor $\boldsymbol{\Theta}$ lassen sich also die Trägheitsmomente für die Rotation um beliebige Achsen durch den Massenmittelpunkt ableiten.

Falls die Achse, in bezug auf welche das effektive Trägheitsmoment berechnet werden soll, nicht durch den Massenmittelpunkt geht, sondern von ihm den Abstand a hat, kann man setzen:

$$\bar{\boldsymbol{r}}_k = \boldsymbol{R} + \boldsymbol{r}_k \ .$$

Hier ist $\boldsymbol{R}$ der Ortsvektor des Massenmittelpunkts M bezüglich eines Koordinatenursprungs auf der Drehachse, $\bar{\boldsymbol{r}}_k$ der entsprechende des k. Massenpunkts und $\boldsymbol{r}_k$ sein Ortsvektor bezüglich M. Dann gilt für die Rotationsenergie:

$$\begin{aligned} T_r &= \tfrac{1}{2}\,\bar{\boldsymbol{\Theta}}_\alpha\,\omega^2 = \frac{\omega^2}{2}\sum_k m_k(\bar{\boldsymbol{r}}_k \times \boldsymbol{e}_\alpha)^2 = \frac{\omega^2}{2}\sum_k m_k\,[(\boldsymbol{R}+\boldsymbol{r}_k)\times \boldsymbol{e}_\alpha]^2 \\ &= \frac{\omega^2}{2}\,[\sum_k m_k(\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{e}_\alpha)^2 + 2\sum_k m_k(\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{e}_\alpha)\cdot(\boldsymbol{r}_k\times\boldsymbol{e}_\alpha) + \sum_k m_k(\boldsymbol{r}_k\times\boldsymbol{e}_\alpha)^2] \ . \end{aligned}$$

Für den Massenmittelpunkt M gilt aber definitionsgemäß:

$$\sum_k m_k \boldsymbol{r}_k = \mathbf{0} \ .$$

Der mittlere Term verschwindet also, und es bleibt:

$$T_r = \frac{\omega^2}{2}[\sum_k m_k(\boldsymbol{r}_k\times\boldsymbol{e}_\alpha)^2 + (\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{e}_\alpha)^2\sum_k m_k] \ .$$

Der Abstand von M von der Drehachse ist andererseits:

$$a = |\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{e}_\alpha| \ ,$$

und man erhält für das Trägheitsmoment um die verschobene Achse den Satz von Steiner:

$$\bar{\Theta}_\alpha = \Theta_\alpha + M\, a^2 \ .$$

Zur Veranschaulichung der Richtungsabhängigkeit von $\boldsymbol{\Theta}_\alpha$ dient das sogenannte Trägheitsellipsoid. Für eine beliebige durch den Einheitsvektor $\mathbf{e}_\alpha$ gegebene Richtung der Drehachse ist im System der Hauptachsen:

$$\Theta_\alpha = \Theta_1\, e_{\alpha 1}^2 + \Theta_2\, e_{\alpha 2}^2 + \Theta_3\, e_{\alpha 3}^2 \ .$$

Die Komponenten $e_{\alpha i}$ bezeichnet man auch häufig als Richtungskosinus. Trägt man jetzt den Betrag von $\Theta_\alpha^{-1/2}$ in der Richtung von $\mathbf{e}_\alpha$ auf, so hat der Endpunkt die Koordinaten

$$x = e_{\alpha 1}\, \Theta_\alpha^{-1/2} \ , \ y = e_{\alpha 2}\, \Theta_\alpha^{-1/2} \ , \ z = e_{\alpha 3}\, \Theta_\alpha^{-1/2}$$

und liegt daher auf der Fläche

$$1 = \Theta_1\, x^2 + \Theta_2\, y^2 + \Theta_3\, z^3 \ .$$

Im allgemeinen Fall handelt es sich dabei um ein dreiachsiges Ellipsoid mit den Halbachsen $\Theta_1^{-1/2}, \Theta_2^{-1/2}, \Theta_3^{-1/2}$, das in den Sonderfällen $\Theta_1 = \Theta_2$ und $\Theta_1 = \Theta_2 = \Theta_3$ zu einem Rotationsellipsoid bzw. zu einer Kugel entartet.

Würde man statt $\Theta_\alpha^{-1/2}$ die Größe Θ_α selbst auftragen, so erhielte man ebenfalls eine geschlossene Fläche, aber von höherem Grade. Ihre Schnittkurve mit x, y-Ebene hätte zum Beispiel in Polarkoordinaten die Gleichung

$$r(\varphi) = \Theta_1\, \cos^2\varphi + \Theta_2\, \sin^2\varphi \ ,$$

wäre also in kartesischen Koordinaten eine Kurve 6. Grades.

c) Eulersche Gleichungen der Kreiseltheorie

Für die Rotationsbewegung um den Massenmittelpunkt herum gilt im raumfesten Inertialsystem:

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{N} \ .$$

Von wesentlichem Interesse ist aber die Bewegung des starren Körpers, also die zeitlich veränderliche Lage der momentanen Drehachse und der Hauptträgheitsachsen. Dazu wird die Bewegungsgleichung für $\mathbf{L}$ im körperfesten System betrachtet. Wie für jeden zeitlich veränderlichen Vektor gilt auch für den Drehimpuls:

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \dot{\boldsymbol{L}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{L} \ ,$$

wobei $d\boldsymbol{L}/dt$ und $\dot{\boldsymbol{L}}$ die zeitliche Änderung relativ zum raumfesten und zum rotierenden körperfesten System bezeichnen. In beiden besteht die Beziehung:

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{\Theta} \cdot \boldsymbol{\omega} \ ,$$

da aber $\boldsymbol{\Theta}$ im körperfesten System konstant ist, folgt aus der Bewegungsgleichung für $\boldsymbol{L}$:

$$\boldsymbol{\Theta} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\Theta} \cdot \boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{N} \ .$$

Durch Zerlegung in die Komponenten nach den drei Hauptachsen ergeben sich die Eulerschen Gleichungen der Kreiseltheorie:

$$
\begin{aligned}
\Theta_1\,\dot\omega_1 - (\Theta_2 - \Theta_3)\,\omega_2\,\omega_3 &= N_1 \\
\Theta_2\,\dot\omega_2 - (\Theta_3 - \Theta_1)\,\omega_3\,\omega_1 &= N_2 \\
\Theta_3\,\dot\omega_3 - (\Theta_1 - \Theta_2)\,\omega_1\,\omega_2 &= N_3 \ .
\end{aligned}
$$

Sie stellen ein gekoppeltes System von drei nichtlinearen Gleichungen für die ω_i dar, die hier die Rolle der $\dot q_i$ spielen. Für einen freien Kreisel ($\boldsymbol{N} = \mathbf{0}$) ist beispielsweise

$$L = T = \tfrac{1}{2}\,(\Theta_1\,\omega_1^2 + \Theta_2\,\omega_2^2 + \Theta_3\,\omega_3^2)$$

die Lagrange-Funktion. Aus ihr folgen die Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \omega_i}\right) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt}\,(\Theta_i\,\omega_i) = \frac{dL_i}{dt} = 0 \ ,$$

die mit den Eulerschen Gleichungen für diesen Fall übereinstimmen. Wie noch gezeigt werden wird, gibt es aber keine holonomen generalisierten Koordinaten q_i mit den ω_i als den zugehörigen $\dot q_i$. Die Eulerschen Gleichungen mit ihrer einfachen, symmetrischen Gestalt sind daher praktisch nur brauchbar, wenn das Drehmoment $\mathbf{N}$ nicht von der Orientierung des starren Körpers abhängt.

Der wichtigste solche Fall ist der des freien Kreisels. Wenn seine Bewegung anfänglich um eine der Hauptträgheitsachsen erfolgt, ist die Drehachse sowohl raum- als auch körperfest (starre Rotation). Bei beliebigen Anfangsbedingungen sind verschiedene Fälle zu unterscheiden.

1) Kugelkreisel ($\Theta_1 = \Theta_2 = \Theta_3$)
Hier ist $\dot\omega_i \equiv 0$ und daher ω_i konstant. Der Kreisel rotiert starr, da jede Achse Hauptträgheitsachse ist.

2) Symmetrischer Kreisel ($\Theta_1 = \Theta_2 \neq \Theta_3$)
Die Eulerschen Gleichungen lauten in diesem Fall:

$$
\begin{aligned}
&\Theta_1\,\dot\omega_1 - (\Theta_1 - \Theta_3)\,\omega_2\,\omega_3 = 0 \\
&\Theta_1\,\dot\omega_2 + (\Theta_1 - \Theta_3)\,\omega_1\,\omega_3 = 0 \\
&\Theta_3\,\dot\omega_3 = 0 \ .
\end{aligned}
$$

Die letzte Gleichung läßt sich unmittelbar integrieren und liefert

$$\omega_3(t) \equiv \omega_0 \ .$$

Damit kann man die beiden ersten Gleichungen schreiben als

$$
\begin{aligned}
\Theta_1\,\dot\omega_1 - (\Theta_1 - \Theta_3)\,\omega_0\,\omega_2 &= 0 \\
\Theta_1\,\dot\omega_2 + (\Theta_1 - \Theta_3)\,\omega_0\,\omega_1 &= 0 \ .
\end{aligned}
$$

Das ist ein gyroskopisches System von zwei linearen Differentialgleichungen 1. Ordnung. Mit dem Ansatz $u = \omega_1 + \imath\,\omega_2$ erhält man statt ihrer die Differentialgleichung

$$\Theta_1\,\dot u - \imath\,(\Theta_3 - \Theta_1)\,\omega_0\,u = 0 \ .$$

Definiert man die Präzessionsfrequenz ω_p durch

$$\omega_p = \frac{\Theta_3 - \Theta_1}{\Theta_1}\,\omega_0 \ ,$$

so ist die Lösung der Bewegungsgleichung

$$u(t) = u_0 \exp(\imath\, \omega_p t\,)\ ,$$

wobei man durch Wahl des Anfangspunktes der Zeitzählung immer erreichen kann, daß u_0 reell und positiv ist. Es folgt schließlich

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \begin{pmatrix} u_0 \cos(\omega_p t) \\ u_0 \sin(\omega_p t) \\ \omega_0 \end{pmatrix}\ .$$

Die momentane Drehachse rotiert (Fig. B8) also mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω_p auf einem festen Kegel um die Figurenachse (reguläre Präzession des freien symmetrischen Kreisels). Das gleiche gilt für den Drehimpuls $\boldsymbol{L}$, wobei $\boldsymbol{\omega}$ und $\boldsymbol{L}$ in der gleichen Ebene durch die Figurenachse liegen. Für $\Theta_3 > \Theta_1$ liegt dabei $\mathbf{L}$ zwischen $\boldsymbol{\omega}$ und der z-Achse, für $\Theta_3 < \Theta_1$ ist es umgekehrt.

Der Erdkörper hat näherungsweise die Gestalt eines abgeplatteten Rotationsellipsoids (Sphäroid) mit der Elliptizität (Abplattungsverhältnis) $(\Theta_3 - \Theta_1)/\Theta_1 \approx 1/300$. Die Winkelgeschwindigkeit seiner Rotation ist $\omega_0 \approx 2\pi/86400$, die Periode der Präzession daher $\omega_p \approx 300$ Tage. Sie ist im wesentlichen identisch mit der Chandler-Periode der Polschwankungen von 420 Tagen, bei denen der Abstand der Drehachse vom Pol (Figurenachse) im Mittel um etwa $0''\!.1$ ($\widehat{=}$ 4 m auf der Erdoberfläche) schwankt.

Im raumfesten System liegen umgekehrt $\boldsymbol{\omega}$ und die Figurenachse in einer Ebene durch den konstanten Drehimpuls $\boldsymbol{L}$, die sich ebenfalls mit der Präzessionsfrequenz, aber in entgegengesetzter Richtung dreht.

3) Asymmetrischer Kreisel ($\Theta_1 < \Theta_2 < \Theta_3$)

Wegen der Nichtlinearität der Eulerschen Gleichungen ist eine direkte Integration nicht möglich, man muß daher nach Erhaltungsgrößen suchen. Durch Erweitern der i. Gleichung mit ω_i und Addition folgt

$$\Theta_1\, \omega_1 \dot{\omega}_1 + \Theta_2\, \omega_2 \dot{\omega}_2 + \Theta_3\, \omega_3 \dot{\omega}_3 = 0$$

und daraus durch Integration nach der Zeit das Energieintegral

$$\tfrac{1}{2}\,(\Theta_1\, \omega_1^2 + \Theta_2\, \omega_2^2 + \Theta_3\, \omega_3^2) \equiv E = T\ .$$

Erweitern mit $\Theta_i \omega_i$ und Addition ergibt andererseits

$$\Theta_1^2\, \omega_1 \dot{\omega}_1 + \Theta_2^2\, \omega_2 \dot{\omega}_2 + \Theta_3^2\, \omega_3 \dot{\omega}_3 = 0\ .$$

Hieraus folgt durch Integration nach der Zeit

$$(\Theta_1\, \omega_1)^2 + (\Theta_2\, \omega_2)^2 + (\Theta_3\, \omega_3)^2 \equiv L^2\ .$$

Im körperfesten System bleibt also nur das Betragsquadrat des Drehimpulses erhalten, nicht, wie im raumfesten System, seine Richtung. Durch Elimination von ω_1 und ω_3 aus E und L^2 erhält man

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= [(2E\,\Theta_3 - L^2) - \Theta_2(\Theta_3 - \Theta_2)\,\omega_2^2]/[\Theta_1(\Theta_3 - \Theta_1)] = \beta_1 - \beta_2\, \omega_2^2 \\ \omega_3^2 &= [(L^2 - 2E\,\Theta_1) - \Theta_2(\Theta_2 - \Theta_1)\,\omega_2^2]/[\Theta_3(\Theta_3 - \Theta_1)] = \gamma_1 - \gamma_2\, \omega_2^2 \end{aligned}$$

und durch Einsetzen in die Bewegungsgleichung für ω_2

$$\Theta_2\,\dot{\omega}_2 = (\Theta_3 - \Theta_1)[(\beta_1 - \beta_2\,\omega_2^2)(\gamma_1 - \gamma_2\,\omega_2^2)]^{1/2} \ .$$

Diese Differentialgleichung für $\omega_2(t)$ läßt sich durch Trennung der Variablen lösen, und es ergibt sich

$$\int_{\omega_2(0)}^{\omega_2(t)} [(\beta_1 - \beta_2\,\omega_2^2)(\gamma_1 - \gamma_2\,\omega_2^2)]^{-1/2} d\omega_2 = \frac{\Theta_3 - \Theta_1}{\Theta_2}\,t \ .$$

Auf der linken Seite steht ein elliptisches Integral 1. Gattung. Die $\omega_i(t)$ lassen sich durch Jacobische elliptische Funktionen ausdrücken. Mit den Abkürzungen

$$\alpha^2 = \frac{(\Theta_3 - \Theta_2)(L^2 - 2E\,\Theta_1)}{\Theta_1\Theta_2\Theta_3} \quad , \quad k^2 = \frac{(\Theta_2 - \Theta_1)(2E\,\Theta_3 - L^2)}{(\Theta_3 - \Theta_2)(L^2 - 2E\,\Theta_1)} \ .$$

ergibt sich zunächst

$$\omega_2(t) = \Big[\frac{2E\,\Theta_3 - L^2}{\Theta_2(\Theta_3 - \Theta_2)}\Big]^{1/2} \operatorname{sn}(\alpha t\,|\,k^2)$$

und dann durch Einsetzen in die obigen Beziehungen

$$\begin{aligned}
\omega_1(t) &= \Big[\frac{2E\,\Theta_3 - L^2}{\Theta_1(\Theta_3 - \Theta_1)}\Big]^{1/2} \operatorname{cn}(\alpha t\,|\,k^2) \\
\omega_3(t) &= \Big[\frac{L^2 - 2E\,\Theta_1}{\Theta_3(\Theta_3 - \Theta_1)}\Big]^{1/2} \operatorname{dn}(\alpha t\,|\,k^2) \ ,
\end{aligned}$$

dabei sind die die Funktionen cn und dn definiert durch

$$\operatorname{cn}(\alpha t\,|\,k^2) = \sqrt{1 - \operatorname{sn}^2(\alpha t\,|\,k^2)} \quad , \quad \operatorname{dn}(\alpha t\,|\,k^2) = \sqrt{1 - k^2\operatorname{sn}^2(\alpha t\,|\,k^2)^2} \ .$$

Damit liegt die Lösung des Problems in geschlossener Form vor. Aus der Bewegung der momentanen Drehachse $\boldsymbol{\omega}(t)$ ergibt sich dann die des Drehimpulses $\boldsymbol{L}(t)$ relativ zum körperfesten System:

$$\boldsymbol{L}(t) = (\Theta_1\,\omega_1(t), \Theta_2\,\omega_2(t), \Theta_3\,\omega_3(t)) \ .$$

Im raumfesten System ist dagegen der Drehimpuls konstant, statt seiner bewegt sich die Figurenachse (z-Achse) und hat die Richtung

$$(-\,\Theta_1\,\omega_1(t), -\,\Theta_2\,\omega_2(t), -\,\Theta_3\,\omega_3(t)) \ .$$

Sie liegt nicht in der durch $\boldsymbol{\omega}$ und $\boldsymbol{L}$ festgelegten Ebene und führt eine komplizierte Taumelbewegung durch. Die momentane Rotationsachse $\boldsymbol{\omega}(t)$ kehrt nach einer Umlaufsdauer

$$T = 4\sqrt{\frac{\Theta_1\Theta_2\Theta_3}{(\Theta_3 - \Theta_2)(L^2 - 2E\,\Theta_1)}}\ \mathrm{K}\Big(\frac{(\Theta_2 - \Theta_1)(2E\,\Theta_3 - L^2)}{(\Theta_3 - \Theta_2)(L^2 - 2E\,\Theta_1)}\Big)$$

in ihre Ausgangslage zurück. Für $\Theta_1 = \Theta_2$ ist ersichtlich $k = 0$, und es ergibt sich wieder die reguläre Präzession des freien symmetrischen Kreisels.

Qualitativ kann man sich einen Überblick über die Bewegung von $\boldsymbol{L}$ mit Hilfe der beiden Erhaltungsgrößen E und L^2 verschaffen:

$$\frac{1}{2}\Big(\frac{L_1^2}{\Theta_1} + \frac{L_2^2}{\Theta_2} + \frac{L_3^2}{\Theta_3}\Big) = E$$

ist, wenn man L_1, L_2, L_3 als räumliche Koordinaten deutet, die Gleichung eines dreiachsigen Ellipsoids (Energieellipsoid),

$$L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 = L^2$$

die einer Kugel (Drehimpulskugel). Der Vektor $\boldsymbol{L}(t)$ muß beiden Bedingungsgleichungen genügen, seine Spitze bewegt sich also auf der Schnittkurve dieser beiden Flächen.

Für die starre Rotation um eine Hauptträgheitsachse entartet diese Kurve zu einem Punktepaar. Bei einer kleinen Störung ist das Verhalten für die drei Hauptachsen unterschiedlich. Für eine Rotation um die Achse größten oder kleinsten Trägheitsmoments entsteht eine kleine geschlossene Kurve, diese Bewegungen sind also stabil. Für die Achse mittleren Trägheitsmoments ergibt sich dagegen eine ausgedehnte Kurve, und die Rotation ist instabil (Fig. B9).

d) Kreisel im Schwerefeld

Wenn sich ein starrer Körper in einem homogenen Schwerefeld bewegt, sind seine Translation und seine Rotation völlig entkoppelt, und der Massenmittelpunkt beschreibt eine Wurfparabel. In einem inhomogenen Schwerefeld treten dagegen Gezeitenkräfte ("tidal forces") auf, die zu einem äußeren Drehmoment um den Massenmittelpunkt führen. Das Verhalten ist ähnlich dem (einfacheren) eines Kreisels im homogenen Schwerefeld, von dem ein Punkt – aber nicht der Massenmittelpunkt – festgehalten wird.

In diesem Fall gibt es eine potentielle Energie V, die von der Ausrichtung des Kreisels abhängt und die Einführung von Winkelkoordinaten erforderlich macht. Als solche werden in der Regel die Euler-Winkel φ, ϑ, ψ verwendet, die die Lage des körperfesten (Hauptachsen-) Systems K relativ zum raumfesten Inertialsystem $\bar{K}$ festlegen. Der Übergang von $\bar{K}$ nach K geschieht in drei Schritten (Fig. B10):

1) Drehung um die raumfeste $\bar{z}$-Achse um den Winkel φ,
2) Drehung um die neue y'-Achse (Knotenlinie) um den Winkel ϑ,
3) Drehung um die körperfeste z-Achse um den Winkel ψ.

Die Drehachsen für die Euler-Winkel bilden also kein orthogonales Dreibein, sie beziehen sich nicht auf das gleiche Koordinatensystem, und verschiedene Sätze φ, ϑ, ψ können die gleiche Drehung darstellen. Es läßt sich aber für jede Drehung ein solches Tripel finden.

Die Euler-Winkel φ, ϑ, ψ liefern eine Parametrisierung der dreiparametrigen nicht-kommutativen Drehgruppe SO(3). Die Matrix der (aktiven) Drehung, die die Transformation zwischen den neuen Komponenten x, y, z eines Vektors und den alten $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ vermittelt:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} ,$$

läßt sich aus den drei Matrizen für die Teildrehungen zusammensetzen:

$$\tilde{D}(\varphi, \vartheta, \psi) = \tilde{D}_z(\psi)\, \tilde{D}_{y'}(\vartheta)\, \tilde{D}_{\bar{z}}(\varphi)$$

und hat die Gestalt

$$\begin{aligned} \tilde{D} &= \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\vartheta & 0 & \sin\vartheta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\vartheta & 0 & \cos\vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\vartheta\cos\varphi - \sin\psi\sin\varphi & -\cos\psi\cos\vartheta\sin\varphi - \sin\psi\cos\varphi & \cos\psi\sin\vartheta \\ \sin\psi\cos\vartheta\cos\varphi + \cos\psi\sin\varphi & -\sin\psi\cos\vartheta\sin\varphi + \cos\psi\cos\varphi & \sin\psi\sin\vartheta \\ -\sin\vartheta\cos\varphi & \sin\vartheta\sin\varphi & \cos\vartheta \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Für die Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ gilt einerseits im körperfesten System die Komponentenzerlegung:

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_1\, \boldsymbol{e}_1 + \omega_2\, \boldsymbol{e}_2 + \omega_3\, \boldsymbol{e}_3 \ ,$$

andererseits läßt sie sich auch durch die Euler-Winkel ausdrücken:

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\, \boldsymbol{e}_\varphi + \dot{\vartheta}\, \boldsymbol{e}_\vartheta + \dot{\psi}\, \boldsymbol{e}_\psi \ ,$$

wobei $\boldsymbol{e}_\varphi, \boldsymbol{e}_\vartheta, \boldsymbol{e}_\psi$ ein im allgemeinen schiefwinkliges Tripel von Einheitsvektoren darstellen. Durch Projektion auf die Achsen des körperfesten Systems ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\dot{\varphi}\, \boldsymbol{e}_\varphi &= -\dot{\varphi} \sin\vartheta \cos\psi\, \boldsymbol{e}_1 + \dot{\varphi} \sin\vartheta \sin\psi\, \boldsymbol{e}_2 + \dot{\varphi} \cos\vartheta\, \boldsymbol{e}_3 \\
\dot{\vartheta}\, \boldsymbol{e}_\vartheta &= \dot{\vartheta} \sin\psi\, \boldsymbol{e}_1 + \dot{\vartheta} \cos\psi\, \boldsymbol{e}_2 \\
\dot{\psi}\, \mathbf{e}_\psi &= \dot{\psi}\, \mathbf{e}_3
\end{aligned}$$

und weiter nach Umordnung durch Vergleich:

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= -\, \dot{\varphi} \sin\vartheta \cos\psi + \dot{\vartheta} \sin\psi \\
\omega_2 &= +\, \dot{\varphi} \sin\vartheta \sin\psi + \dot{\vartheta} \cos\psi \\
\omega_3 &= +\, \dot{\varphi} \cos\vartheta + \dot{\psi} \ .
\end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Beziehungen läßt sich auch zeigen, daß es keinen "Drehvektor" $\boldsymbol{\varphi}$ mit den Komponenten $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ geben kann, dessen zeitliche Ableitung die Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ ist. Dann müßten sich nämlich die Winkelkoordinaten φ_i durch die Euler-Winkel ausdrücken lassen:

$$\varphi_i = f_i(\varphi, \vartheta, \psi) \quad \rightarrow \quad \omega_i = \frac{d\varphi_i}{dt} = \frac{\partial f_i}{\partial \varphi}\, \dot{\varphi} + \frac{\partial f_i}{\partial \vartheta}\, \dot{\vartheta} + \frac{\partial f_i}{\partial \psi}\, \dot{\psi} \ .$$

Durch Vergleich mit den obigen Ausdrücken folgt zum Beispiel:

$$\frac{\partial f_1}{\partial \varphi} = -\sin\vartheta \cos\psi \ , \ \frac{\partial f_1}{\partial \vartheta} = \sin\psi \ , \ \frac{\partial f_1}{\partial \psi} = 0$$

und daraus durch nochmaliges Differenzieren:

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial \varphi \partial \vartheta} = -\cos\vartheta \cos\psi \neq 0 = \frac{\partial^2 f_1}{\partial \vartheta \partial \varphi} \ ,$$

also ein Widerspruch zur Annahme.

Die Ersetzung von ω_i durch $\dot{\varphi}, \dot{\vartheta}, \dot{\psi}$ ergibt für die Rotationsenergie eines asymmetrischen Kreisels:

$$T = \frac{\Theta_1}{2} (-\, \dot{\varphi} \sin\vartheta \cos\psi + \dot{\vartheta} \sin\psi)^2 + \frac{\Theta_2}{2} (\dot{\varphi} \sin\vartheta \sin\psi + \dot{\vartheta} \cos\psi)^2 + \frac{\Theta_3}{2} (\dot{\varphi} \cos\vartheta + \dot{\psi})^2.$$

Die Trägheitsmomente Θ_i beziehen sich dabei auf den festgehaltenen Punkt, mit denen bezüglich des Massenmittelpunkts hängen sie über den Satz von Steiner zusammen. Für einen symmetrischen Kreisel mit $\Theta_1 = \Theta_2$ vereinfacht sich der Ausdruck zu:

$$T = \frac{\Theta_1}{2} (\dot{\varphi}^2 \sin^2\vartheta + \dot{\vartheta}^2) + \frac{\Theta_3}{2} (\dot{\varphi} \cos\vartheta + \dot{\psi})^2$$

und für einen Kugelkreisel mit $\Theta_1 = \Theta_2 = \Theta_3 = \Theta$ zu:

$$T = \frac{\Theta}{2} (\dot{\varphi}^2 + \dot{\vartheta}^2 + \dot{\psi}^2 + 2\, \dot{\varphi}\, \dot{\psi} \cos\vartheta) \ .$$

In jedem Fall ergeben sich im Vergleich zur Darstellung mit Hilfe der ω_i wesentlich kompliziertere Ausdrücke.

Zur Verifizierung der mit Hilfe der Eulerschen Gleichungen gewonnenen Ergebnisse wird als erstes der Fall des freien symmetrischen Kreisels ($V \equiv 0$) betrachtet. Als generalisierte Koordinaten verwenden wir die Euler-Winkel. Die Lagrange-Funktion stimmt hier mit der kinetischen Energie überein und hängt nicht von der Zeit t ab. Es ergeben sich drei Bewegungsintegrale (Erhaltungsgrößen):

1) φ ist eine zyklische Koordinate, der konjugierte Impuls p_φ – die Komponente des Drehimpulses in Richtung der raumfesten $\bar{z}$-Achse – bleibt erhalten:

$$p_\varphi = \Theta_1\,\dot{\varphi}\sin^2\vartheta + \Theta_3\cos\vartheta\,(\dot{\varphi}\cos\vartheta + \dot{\psi}) \equiv c_1 \ .$$

2) ψ ist eine zyklische Koordinate, der konjugierte Impuls p_ψ – die Komponente des Drehimpulses in Richtung der körperfesten z-Achse – bleibt ebenfalls erhalten:

$$p_\psi = \Theta_3\,(\dot{\varphi}\cos\vartheta + \dot{\psi}) \equiv c_2 \ .$$

Das folgt auch aus der Symmetrie des Systems bezüglich der entsprechenden Koordinatenachsen. Aus diesen beiden Gleichungen lassen sich $\dot{\varphi}$ und $\dot{\psi}$ eliminieren:

$$\dot{\varphi} = \frac{c_1 - c_2\cos\vartheta}{\Theta_1\sin^2\vartheta} \quad , \quad \dot{\psi} = \frac{c_2}{\Theta_3} - \frac{(c_1 - c_2\cos\vartheta)\cos\vartheta}{\Theta_1\sin^2\vartheta} \ .$$

Bei bekanntem $\vartheta(t)$ kann man daraus $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ durch Quadraturen erhalten. Für diese letztere Koordinate ergibt sich die Bewegungsgleichung

$$\Theta_1\,\ddot{\vartheta} + (\Theta_1 - \Theta_3)\,\dot{\varphi}^2\sin\vartheta\cos\vartheta + \Theta_3\,\dot{\varphi}\,\dot{\psi}\sin\vartheta = 0 \ .$$

Durch Einsetzen für $\dot{\varphi}$ und $\dot{\psi}$ wird daraus nach einigen Umformungen

$$\ddot{\vartheta} - \frac{(c_1 - c_2\cos\vartheta)(c_1\cos\vartheta - c_2)}{\Theta_1^2\sin^3\vartheta} = 0 \ .$$

Diese Differentialgleichung 2. Ordnung läßt sich in der üblichen Weise integrieren.

3) Einfacher kommt man zum gleichen Ergebnis, wenn man berücksichtigt, daß die Hamilton-Funktion erhalten bleibt und mit der Energie übereinstimmt, da die kinetische Energie homogen-quadratisch in $\dot{\varphi}, \dot{\vartheta}, \dot{\psi}$ ist.

$$E = \frac{\Theta_1}{2}\,(\dot{\varphi}^2\sin^2\vartheta + \dot{\vartheta}^2) + \frac{\Theta_3}{2}\,(\dot{\varphi}\cos\vartheta + \dot{\psi})^2 \equiv c_3 \ .$$

Durch Einsetzen für $\dot{\varphi}$ und $\dot{\psi}$ ergibt sich daraus für $\vartheta(t)$ eine nichtlineare Differentialgleichung 1. Ordnung mit getrennten Variablen:

$$\dot{\vartheta}^2 = \frac{2}{\Theta_1}\Big(c_3 - \frac{c_2^2}{2\,\Theta_3}\Big) - \frac{(c_1 - c_2\cos\vartheta)^2}{\Theta_1^2\sin^2\vartheta} \ .$$

Mit der Substitution $\cos\vartheta = u$ und den Abkürzungen

$$\alpha = \frac{2}{\Theta_1}\Big(c_3 - \frac{c_2^2}{2\,\Theta_3}\Big) \ , \ a = \frac{c_1}{\Theta_1} \ , \ b = \frac{c_2}{\Theta_1}$$

wird daraus:

$$\dot{u}^2 = \alpha\,(1 - u^2) - (a - b\,u)^2 = f(u) \ .$$

Da für reelle u stets $f(u) > 0$ sein muß, bewegt sich u zwischen den Grenzwerten

$$u_{1,2} = \frac{1}{\alpha + b^2}\Big[\sqrt{\alpha(\alpha + b^2 - a^2)} \mp a\,b\Big] \ .$$

Das allgemeine Integral der Differentialgleichung läßt sich in geschlossener Form angeben:

$$u(t) = \frac{1}{\alpha + b^2}\Big[\,a\,b + \sqrt{\alpha(\alpha + b^2 - a^2)}\,\cos(\sqrt{\alpha + b^2}\,t)\Big] \ .$$

Es handelt sich also um eine periodische Schwankung zwischen den Breitenkreisen $\vartheta_1 \mathrel{\hat{=}} u_1$ und $\vartheta_2 \mathrel{\hat{=}} u_2$. Nach dem Einsetzen in die Gleichungen für $\dot\varphi$ und $\dot\psi$ entstehen recht komplizierte Ausdrücke, die sich aber ebenfalls in geschlossener Form auswerten lassen.

Die Bewegung der Figurenachse besteht in einer gleichmäßigen Präzession mit der Kreisfrequenz

$$\omega_p = \sqrt{\alpha + b^2}$$

um den raumfesten Drehimpuls $\boldsymbol{L}$. Das komplizierte Aussehen der Formeln rührt daher, daß die Richtung der raumfesten $\bar z$-Achse, auf die der Winkel ϑ bezogen wird, willkürlich ist, was zur Schräglage von $\boldsymbol{L}$ führt (Fig. B11).

Die Willkür bei der Ausrichtung des Koordinatensystems führt häufig dazu, daß einfache Bewegungen in recht komplizierter Weise beschrieben werden. Setzt man in der Lagrange-Funktion des sphärischen Pendels $g = 0$, so beschreibt sie einen Massenpunkt, der an eine Kugeloberfläche gebunden, aber im übrigen frei ist (Rotator):

$$L = \frac{m}{2}\,l^2(\dot\vartheta^2 + \sin^2\!\vartheta\,\dot\varphi^2).$$

Hier bleiben die z-Komponente des Drehimpulses L und die Energie E erhalten:

$$\begin{aligned} ml^2\sin^2\dot\varphi &= L \\ \frac{m}{2}\,l^2(\dot\vartheta^2 + \sin^2\!\vartheta\,\dot\varphi^2) &= E \end{aligned}$$

Durch Elimination von $\dot\varphi$ ergibt sich wie vorher:

$$\dot\vartheta^2 + \frac{L^2}{m^2l^2\sin^2\vartheta} = \frac{2E}{ml^2} \ .$$

Die Integration dieser Differentialgleichung durch Trennung der Variablen ergibt:

$$\vartheta(t) = \arccos\left[\sqrt{1 - \frac{L^2}{2ml^2E}}\,\cos\left(\sqrt{\frac{2E}{ml^2}}\,t\right)\right] \ .$$

Durch Einsetzen in die Gleichung der Drehimpulserhaltung folgt:

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \frac{2L}{ml^2}\int\limits_0^t \left[\left(1 + \frac{L^2}{ml^2}\right) - \left(1 - \frac{L^2}{ml^2}\right)\cos\left(2\sqrt{\frac{2E}{ml^2}}\,t\right)\right]^{-1} dt \\ &= \arctan\left[\sqrt{\frac{l^2}{2ml^2E}}\,\tan\left(\sqrt{\frac{2E}{ml^2}}\,t\right)\right] \ . \end{aligned}$$

Trotz dieser komplizierten Ausdrücke für $\vartheta(t)$ und $\varphi(t)$ ist die Bewegung des Massenpunktes sehr einfach. Da das (Zwangs-) Kraftfeld, in dem er sich bewegt, kugelsymmetrisch ist, bleibt sein Drehimpuls erhalten. Seine Bahn ist ein Großkreis in der dazu senkrechten Ebene, der mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit $\omega = \sqrt{2E/ml^2}$ durchlaufen wird.

Es handelt sich um einen Sonderfall des freien symmetrischen Kreisels mit den Hauptträgheitsmomenten $\Theta_1 = \Theta_2 = ml^2$ und $\Theta_3 = 0$. Daraus folgt:

$$\alpha = \frac{2E}{ml^2} \quad , \quad a = \frac{L}{ml^2} \quad , \quad b = 0 \ ,$$

und es ergibt sich Übereinstimmung mit der allgemeinen Formel.

Die freie Bewegung des asymmetrischen Kreisels läßt sich ebenfalls in dieser Weise behandeln und führt zu Ausdrücken, die sich durch elliptische Funktionen darstellen lassen, aber von recht komplizierter Gestalt sind.

Schwerer symmetrischer Kreisel

Ein symmetrischer Kreisel im homogenen Schwerefeld wird beschrieben durch die Lagrange-Funktion:

$$L = \frac{\Theta_1}{2}\,(\dot\varphi^2 \sin^2\!\vartheta + \dot\vartheta^2) + \frac{\Theta_3}{2}\,(\dot\varphi \cos\vartheta + \dot\psi)^2 - m\,g\,l\cos\vartheta \ ,$$

dabei liegt $\mathbf{e}_3$ in der Geraden, die den festgehaltenen Punkt mit dem Massenmittelpunkt verbindet. Wie beim freien symmetrischen Kreisel sind φ und ψ zyklische Variablen, und die zugehörigen generalisierten Impulse (Drehimpulskomponenten) bleiben erhalten:

$$\begin{aligned} \Theta_1\,\dot\varphi \sin^2\!\vartheta + \Theta_3 \cos\vartheta\,(\dot\varphi\cos\vartheta + \dot\psi) &\equiv c_1 \\ \Theta_3\,(\dot\varphi\cos\vartheta + \dot\psi) &\equiv c_2 \ . \end{aligned}$$

Daraus lassen sich wieder $\dot\varphi$ und $\dot\psi$ eliminieren, und man erhält mit der Substitution $\cos\vartheta = u$:

$$\begin{aligned} \dot\varphi &= \frac{c_1 - c_2\cos\vartheta}{\Theta_1 \sin^2\!\vartheta} = \frac{a - b\,u}{1-u^2} \\ \dot\psi &= \frac{c_2}{\Theta_3} - \frac{\cos\vartheta(c_1 - c_2\cos\vartheta)}{\Theta_1\sin^2\!\vartheta} = \frac{\Theta_1}{\Theta_3}\,b - \frac{u\,(a-b\,u)}{1-u^2} \ , \end{aligned}$$

wobei a und b die schon früher eingeführten Abkürzungen sind. Auch hier existiert außerdem das Energieintegral

$$\frac{\Theta_1}{2}\,(\dot\varphi^2 \sin^2\!\vartheta + \dot\vartheta^2) + \frac{\Theta_3}{2}\,(\dot\varphi\cos\vartheta + \dot\psi)^2 + m\,g\,l\cos\vartheta \equiv c_3 \ .$$

Durch Einsetzen der Ausdrücke für $\dot\varphi$ und $\dot\psi$ und Auflösen nach $\dot\vartheta$ ergibt sich

$$\dot\vartheta^2 = \frac{2}{\Theta_1}\,(c_3 - \frac{c_2^2}{2\,\Theta_3} - m\,g\,l\cos\vartheta) - \frac{(c_1 - c_2\cos\vartheta)^2}{\Theta_1^2\sin^2\!\vartheta} \ .$$

Mit der Abkürzung $\beta = 2\,m\,g\,l/\Theta_1$ läßt sich diese Differentialgleichung 1. Ordnung schreiben als:

$$\dot u^2 = (\alpha - \beta\,u)(1-u^2) - (a - b\,u)^2 = f(u) \ .$$

Die Funktion $f(u)$ hat als Polynom 3. Grades in u drei Nullstellen $u_1 \le u_2 \le u_3$. Da sie an den Enden des physikalisch sinnvollen Intervalls negativ ist:

$$f(+1) = -(b-a)^2 \le 0 \quad , \quad f(-1) = -(b+a)^2 \le 0$$

muß u_3 außerhalb liegen. Für u_1, u_2 muß gelten:

$$-1 \le u_1 \le u_2 \le +1 \ .$$

Die Bewegung erfolgt also zwischen den Breitenkreisen ϑ_1 und ϑ_2. Die Lösung der Differentialgleichung durch Trennung der Variablen führt wieder auf elliptische Integrale:

$$\cos\vartheta = u_1 + (u_2 - u_1)\,\mathrm{sn}^2\Big(\frac{1}{2}\sqrt{\beta(u_3 - u_2)}\,(t - t_0)\,|\,\frac{u_2 - u_1}{u_3 - u_1}\Big)$$

Einen qualitativen Überblick über das Verhalten von $u(t)$ erhält man durch die Betrachtung von $f(u)$. Zur Veranschaulichung kann man den Durchstoßpunkt der Figurenachse durch eine Kugel um den festgehaltenen Punkt ("Locus") wählen. Seine zeitliche Bewegung in Breite $\vartheta(t)$ bezeichnet man als Nutation, in Länge $\varphi(t)$ als Präzession (Fig. B12). Bei bekanntem $u(t)$ folgt die letztere aus der obigen Beziehung

$$\dot{\varphi} = \frac{a - b\,u}{1 - u^2}$$

und verläuft verschieden, je nach der Lage der Nullstelle $u_0 = a/b$ im Intervall $[u_2, u_1]$.

1) $u_0 \leq u_1$ oder $u_0 \geq u_2$
$\dot{\varphi}$ hat immer das gleiche Vorzeichen, und die Präzession erfolgt monoton im einen oder anderen Drehsinn.

2) $u_1 < u_0 < u_2$
$\dot{\varphi}$ wechselt bei u_0 das Vorzeichen. Damit ändert sich die Richtung der φ-Bewegung, es bleibt aber immer im Mittel eine restliche Präzession.

3) $u_0 = u_2$ oder $u_0 = u_1$
Im ersten Fall verschwinden an der oberen Intervallgrenze u_1 gleichzeitig $\dot{\vartheta}$ und $\dot{\varphi}$, die Locus-Kurve hat dort eine Spitze. Analog entsteht bei im zweiten Fall eine Spitze an der unteren Intervallgrenze. Der erste Fall wird wegen der Anfangsbedingungen $\dot{\vartheta} = \dot{\varphi} = 0$ häufig im Experiment realisiert (Loslassen eines Kreisels aus einer Ruhelage). Für spezielle Anfangsbedingungen kann man auch eine reguläre Präzession erhalten, bei der $\dot{\varphi}$ konstant ist, dann muß aber $\dot{\varphi}(0) \neq 0$ sein. Diese Voraussetzung ist im Experiment im allgemeinen nicht gegeben.

Schneller Kreisel

Wenn die Energie der Rotation um die Figurenachse groß gegenüber der potentiellen Energie im Schwerefeld ist:

$$\tfrac{1}{2}\,\Theta_3\,\omega_3^2 \gg m\,g\,l\ ,$$

spricht man von einem schnellen Kreisel. Aus den speziellen Anfangsbedingungen

$$\vartheta(0) = \vartheta_0\ ,\ \dot{\vartheta}(0) = \dot{\varphi}(0) = 0 \quad \rightarrow \quad u(0) = u_2 = u_0$$

ergeben sich die Beziehungen

$$\dot{\varphi}(0) = 0\ \rightarrow\ u_0 = a/b \quad ,\quad \dot{\vartheta}(0) = 0\ \rightarrow\ u_0 = \alpha/\beta\ .$$

Damit wird die Differentialgleichung für $u(t)$:

$$\dot{u}^2 = f(u) = (u_0 - u)[\beta(1 - u^2) - b^2(u_0 - u)]\ .$$

Eine der Nullstellen von $f(u)$ liegt bei $u = u_0 = u_2$, die beiden anderen folgen aus

$$\beta(1 - u^2) - b^2(u_0 - u) = 0\ .$$

Mit der Abkürzung $x = u_0 - u$ läßt sich das schreiben als

$$x^2 + (\frac{b^2}{\beta} - 2\,u_0)\,x - 1 + u_0^2 = 0\ .$$

Hier ist aber wegen der obigen Bedingung

$$\frac{b^2}{\beta} = \frac{\Theta_3}{\Theta_1}\frac{\Theta_3\,\omega_3^2}{2m\,g\,l} \gg 1\ .$$

Der Term mit x überwiegt also bei weitem die anderen. Eine der Lösungen liegt daher bei einem absolut großen negativen Wert und hat keine physikalische Bedeutung, für die andere gilt

$$x_1 \approx \frac{\beta}{b^2}\,(1 - u_0^2) = 2\,\frac{\Theta_1\,m\,g\,l\sin^2\vartheta_0}{\Theta_3\,\omega_3^2}\ .$$

Die Differenz $x_1 = u_0 - u_1$ entspricht dem Variationsbereich von ϑ. Sie nimmt mit ω_3^2 ab, für große ω_3 ist also $\vartheta \approx \vartheta_0$. Die Bewegung erfolgt nahe dem Breitenkreis ϑ_0 und ist überlagert durch kleine Nutationen $x(t)$ mit

$$\dot{x}^2 = x\,(\beta \sin^2\vartheta_0 - b^2\, x) \; .$$

Diese Differentialgleichung für $x(t)$ hat die periodische Lösung

$$x(t) = \frac{\beta \sin^2\vartheta_0}{2b^2}[\,1 - \cos(bt)] \; .$$

Die Frequenz der Nutation ist also unabhängig von β (Schwerefeld), die Amplitude sehr klein. Man bezeichnet diese Bewegung des schweren freien Kreisels als pseudoreguläre Präzession.

Zum gleichen Ergebnis kommt man auch mit Hilfe der exakten Formel für $\vartheta(t)$. Wegen $u_3 \gg 1$ und $\beta u_3 \approx b^2$ gilt

$$\mathrm{sn}^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\beta(u_3 - u_2)}\,(t - t_0)\,|\,\frac{u_2 - u_1}{u_3 - u_1}\right) \approx \sin^2\left(\frac{b}{2}(t - t_0)\right) \; ,$$

was bei Festlegung der Phase durch $b\,t_0 = \pi$ den obigen Ausdruck ergibt.

Das gleichzeitige Fortschreiten der Kreiselachse in φ-Richtung erfolgt mit der Winkelgeschwindigkeit

$$\dot{\varphi} = \frac{a - b\,u}{1 - u^2} = \frac{b\,(u_0 - u)}{\sin^2\vartheta_0} = \frac{b}{\sin^2\vartheta_0}\,x \; .$$

Ihre Mittelung über viele Nutationsperioden ergibt

$$\omega_p \approx \frac{b}{\sin^2\vartheta_0}\,\frac{\beta\sin^2\vartheta_0}{2b^2} = \frac{\beta}{2b} = \frac{m\,g\,l}{c_2} \; .$$

Für eine reguläre Präzession mit $\vartheta(t) \equiv \vartheta_0$ und konstantem $\dot{\varphi}$ folgt andererseits auf elementarem Wege das gleiche Ergebnis aus der allgemeinen Beziehung

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{L} = \boldsymbol{N}$$

durch Einsetzen der Beträge von $\boldsymbol{L}$ und $\boldsymbol{N}$

$$m\,g\,l \sin\vartheta_0 = \omega_p\, c_2 \sin\vartheta_0 \; .$$

Dabei wurde berücksichtigt, daß für einen schnellen Kreisel gilt:

$$\boldsymbol{L} \approx c_2\, \boldsymbol{e}_\psi \quad \rightarrow \quad \dot{\boldsymbol{L}} \approx \boldsymbol{0} \; .$$

Da bei den Nutationen der pseudoregulären Präzession sehr hohe Werte von $\dot{\vartheta}$ auftreten, werden sie durch die Reibung im Lager stark gedämpft. Im Experiment geht daher eine pseudoreguläre Präzession sehr bald näherungsweise in eine reguläre Präzession über.

Viele Kreiselphänomene werden, wie im letzten Beispiel, stark durch durch Reibungskräfte beeinflußt. In diesem Fall müssen die Lagrange-Gleichungen, wie am Ende von Kapitel A gezeigt wurde, durch dissipative Terme ergänzt werden. In Einzelfällen sind aber auch ohne diese Aussagen möglich.

“sleeping top”

Wenn ein symmetrischer Kreisel zu Anfang um die Vertikale rotiert:

$$\vartheta \equiv 0 \quad \rightarrow \quad u_2 = u_0 = +1 \; ,$$

lautet die Differentialgleichung für $u(t)$:

$$\dot{u}^2 = f(u) = (1 - u)^2[\beta(1 + u) - b^2] \; .$$

Die rechte Seite hat eine doppelte Nullstelle bei $u = 1$, die dritte liegt bei $\bar{u} = b^2/\beta - 1$. Es sind dann zwei Fälle möglich (Fig. B13):

a) $b^2/\beta > 2 \mathrel{\hat{=}} \bar{u} > 1$
Dann ist $u_1 = u_2 = u_0 = 1 \; , \; u_3 = \bar{u}$.

Der erlaubte Bereich für u schrumpft also auf den Punkt (+1,0) zusammen. Der Kreisel verharrt in der senkrechten Position, das Gleichgewicht ist stabil.

b) $b^2/\beta < 2 \mathrel{\hat{=}} \bar{u} < 1$
Dann ist $u_2 = u_3 = u_0 = 1$, $u_1 = \bar{u}$
Der erlaubte Bereich für u liegt zwischen $\bar{u}$ und $+1$. Kleine Störungen führen zu einem Umschlagen der Bewegung, das Gleichgewicht ist instabil.

Ein anfänglich schneller Kreisel (Fall a) verliert im Laufe der Zeit durch die Reibung im Auflagepunkt an Rotationsenergie. Bei der kritischen Kreisfrequenz

$$\omega_3 = \omega_c = \sqrt{\frac{4\,\Theta_1\, m\, g\, l}{\Theta_3^2}}$$

wird $\bar{u} = 1$. Die potentielle Energie im Schwerefeld ist dann näherungsweise gleich der kinetischen Energie der Rotation um die Figurenachse, und es erfolgt ein Übergang aus einer stabilen (Fall a) in eine instabile Gleichgewichtslage (Fall b).

Schwerer asymmetrischer Kreisel

Die Rotationssymmetrie des Schwerefeldes um eine vertikale Achse durch den festgehaltenen Punkt gilt auch hier, die Koordinate φ ist daher weiterhin zyklisch, und die Projektion des Drehimpulses auf die raumfeste $\bar{z}$-Achse bleibt erhalten. Das System ist aber nicht mehr symmetrisch um die körperfeste z-Achse, die Koordinate ψ also nicht mehr zyklisch. Es verbleiben nur noch die zwei Bewegungsintegrale E und p_φ, und das System ist nicht mehr integrabel. Für bestimmte Parameterbereiche kommt es zu chaotischem Verhalten. Ein Beispiel dafür bietet die irreguläre Bewegung des Satelliten Hyperion im Gravitationsfeld des Planeten Saturn.

C. HAMILTON-MECHANIK

Die Grundaufgabe der Mechanik ist sowohl in der Newton- als auch in der Lagrange-Formulierung die Aufstellung und Integration der Bewegungsgleichungen, eines Systems von s gekoppelten gewöhnlichen Differentialgleichungen 2. Ordnung. Die $2s$ erforderlichen Integrationen können ganz oder teilweise ersetzt werden durch die Kenntnis von Bewegungsintegralen, von denen höchstens $2s-1$ Erhaltungsgrößen sein können. Falls diese letzteren bekannt sind, kann man aus ihnen durch Elimination der Geschwindigkeiten die Bahnkurve erhalten.

Für einen Massenpunkt der Masse m im homogenen Schwerefeld der Feldstärke $(0,0,-g)$ ergeben sich aus Newtons LEX II unmittelbar die Bewegungsgleichungen

$$m\ddot{x} = 0 \ , \ m\ddot{y} = 0 \ , \ m\ddot{z} = -mg \ .$$

Die folgenden fünf Erhaltungsgrößen und ein weiteres explizit von der Zeit abhängiges Bewegungsintegral:

$$\begin{aligned}
p_x &= m\dot{x} \ , \ p_y = m\dot{y} \ , \ E = \frac{m}{2}\,(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) + m\,g\,z \\
L_z &= m\,(x\dot{y} - y\dot{x}) \\
A &= (\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)\,z - (x\dot{x}+y\dot{y}+z\dot{z})\,\dot{z} - \frac{g}{2}\,(x^2+y^2) \\
x_0 &= x - \dot{x}\,t
\end{aligned}$$

sind unabhängig voneinander und ersetzen die Integration der Bewegungsgleichungen. Aus der Konstanz von L_z folgt, daß die Bewegung in einer vertikalen Ebene vor sich geht. Beschränkt man sich auf diese, so ist $y(t) \equiv 0$ und die Zahl der Freiheitsgrade $s=2$. Bei geeigneter Definition der Koordinaten x und z sind die verbleibenden drei unabhängigen Erhaltungsgrößen:

$$p_x = m\dot{x} \ , \ E = \frac{m}{2}\,(\dot{x}^2+\dot{z}^2) + m\,g\,z \ , \ A = z\dot{x}^2 - x\dot{x}\dot{z} - \frac{g}{2}x^2 \ .$$

Durch Elimination von $\dot{x}$ und $\dot{z}$ erhält man daraus die Bahnkurve:

$$z(x) = \frac{m^2A}{p_x^2} + \sqrt{\frac{2mE}{p_x^2} - 1 - \frac{2m^4gA}{p_x^4}}\ x - \frac{m^2g}{2\,p_x^2}\,x^2 \ ,$$

also eine Wurfparabel. Aus dem zeitabhängigen Bewegungsintegral folgt zunächst:

$$x(t) = x_0 + \frac{p_x}{m}\,t$$

und dann durch Einsetzen in die Bahnkurve auch $z(t)$.

Ein Vorteil der Lagrange-Formulierung liegt darin, daß man aus der Form der Lagrange-Funktion auf die Existenz von Bewegungsintegralen schließen kann. Nach dem Theorem von Noether entspricht nämlich jeder Symmetrietransformation, die die Lagrange-Funktion invariant läßt, ein solches. Besonders wichtig ist der Fall einer zyklischen generalisierten Koordinate q_k, hier ist das zugehörige Bewegungsintegral der zu ihr konjugierte generalisierte Impuls:

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \ .$$

Für das obige Beispiel ist die Lagrange-Funktion

$$L = \frac{m}{2}\,(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) - m\,g\,z \ .$$

Die Variablen x und y sind zyklisch und führen zu den Erhaltungsgrößen p_x und p_y. L hängt nicht explizit von der Zeit t ab und ist in den Geschwindigkeiten homogen quadratisch, daher ist die Energie ebenfalls eine Erhaltungsgröße.

Da die maximale Anzahl von zyklischen Koordinaten s, die von Bewegungsintegralen aber $2s$ ist, können im allgemeinen nicht alle Bewegungsintegrale als konjugierte Impulse zu zyklischen Koordinaten dargestellt werden. Der entscheidende Vorteil der Lagrange-Formulierung gegenüber der Newton-Formulierung besteht darin, daß die Lagrange-Gleichungen forminvariant gegenüber Punkttransformationen

$$Q_i = f_i(q_1, \ldots, q_s, t)$$

sind. Dabei können neue zyklische Q_k auftreten und zu weiteren Bewegungsintegralen P_k führen.

Für das obige Beispiel wird die Lagrange-Funktion durch Transformation auf Zylinderkoordinaten:

$$L = \frac{m}{2}\,(\dot\rho^2 + \rho^2\dot\varphi^2 + \dot z^2) - m\,g\,z \ .$$

Die neue Variable φ ist zyklisch und führt zu der Erhaltungsgröße L_z.

Durch die Punkttransformation

$$X = x \ , \ Y = y \ , \ Z = z + \frac{1}{2}\,g\,t^2$$

geht die Lagrange-Funktion andererseits über in

$$L = \frac{m}{2}\,(\dot X^2 + \dot Y^2 + \dot Z^2) - m\,g\,(\dot Z\,t + Z - g\,t^2) \ .$$

Der letzte Term ist die totale Ableitung einer Funktion nach der Zeit:

$$L = \frac{m}{2}\,(\dot X^2 + \dot Y^2 + \dot Z^2) - \frac{d}{dt}[m\,g\,(Z\,t - \frac{1}{3}\,g\,t^3)] \ .$$

L ist daher äquivalent zur Lagrange-Funktion $\tilde L$ eines freien Teilchens:

$$\tilde L = \frac{m}{2}\,(\dot X^2 + \dot Y^2 + \dot Z^2) \ .$$

In $\tilde L$ sind alle Koordinaten zyklisch, daraus folgen die Bewegungsintegrale:

$$p_X = m\dot X = m\dot x \ , \ p_Y = m\dot Y = m\dot y \ , \ p_Z = m\dot Z = m\dot z + g\,t \ .$$

Da ein freies Teilchen ein abgeschlossenes System darstellt, sind außer den Komponenten des Linearimpulses auch die des Drehimpulses und die Energie Erhaltungsgrößen. Wegen $s = 3$ können die sieben Bewegungsintegrale nicht unabhängig voneinander sein. Es gelten die Beziehungen:

$$\begin{aligned} &2m\,E - (p_X^2 + p_Y^2 + p_z^2) = 0 \\ &p_X L_X + p_Y L_Y + p_Z L_Z = 0 \ , \end{aligned}$$

man kann man sich daher auf die fünf Erhaltungsgrößen p_X, p_Y, p_Z, L_Z, E beschränken.

Durch Punkttransformationen läßt sich aber nicht in jedem Fall erreichen, daß alle Koordinaten zyklisch werden.

Für einen eindimensionalen harmonischen Oszillator ist die Lagrange-Funktion:

$$L = \frac{m}{2}\,\dot q^2 - \frac{k}{2}\,q^2 \ .$$

Die allgemeinste Punkttransformation bei $s = 1$ ist:

$$Q = f(q,t) \quad \rightarrow \quad q = F(Q,t) \ .$$

Sie führt zu einer linearen Transformation der generalisierten Geschwindigkeiten:

$$\dot q = \frac{\partial F}{\partial Q}\,\dot Q + \frac{\partial F}{\partial t} \ ,$$

und die Lagrange-Funktion lautet in den neuen Variablen:

$$L = \frac{m}{2}\left[\left(\frac{\partial F}{\partial Q}\right)^2 \dot{Q}^2 + 2\,\frac{\partial F}{\partial Q}\frac{\partial F}{\partial t}\,\dot{Q} + \left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)^2\right] + \frac{k}{2}\,F^2(Q,t)\ .$$

Da Q und $\dot{Q}$ unabhängige Veränderliche sind, müssen die Koeffizienten von $\dot{Q}$ und $\dot{Q}^2$ je für sich unabhängig von Q sein, also gilt zunächst wegen des Terms mit $\dot{Q}^2$:

$$\frac{\partial F}{\partial Q} = a(t) \quad \rightarrow \quad F = a(t)\,Q + b(t)\ ,$$

und dann wegen des Terms mit $\dot{Q}$:

$$2a(t)\,[\dot{a}(t)\,Q + \dot{b}(t)] = c(t)\ .$$

Da die rechte Seite dieser Gleichung nicht von Q abhängt, muß sein:

$$\dot{a} \equiv 0 \quad \rightarrow \quad a(t) \equiv \alpha \quad \rightarrow \quad q = \alpha\,Q + b(t)\ .$$

Bei einer solchen linearen Transformation hängt aber die potentielle Energie weiterhin quadratisch von Q ab.

Für Systeme, deren Lagrange-Funktion nicht explizit von der Zeit abhängt (autonome Systeme) gilt das Noether-Theorem, das besagt, daß jede Symmetrietransformation von L zu einer Erhaltungsgröße führt. Umgekehrt gibt es aber Bewegungsintegrale, wie den Laplace-Runge-Lenz-Vektor beim Kepler-Problem, denen keine solche Symmetrietransformation entspricht. Der eigentliche Grund hierfür sowie dafür, daß durch eine Punkttransformation nicht alle Koordinaten zyklisch gemacht werden können, liegt darin, daß dabei von den $2s$ Variablen $q_i, \dot{q}_i$ der Lagrange-Funktion zwar die q_i beliebig transformiert werden können:

$$Q_i = f_i(q_1, \ldots, q_s, t)\ ,$$

aber dadurch die Transformation der $\dot{q}_i$ festgelegt und notwendig linear ist:

$$\dot{Q}_i = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial f_i}{\partial q_j}\,\dot{q}_j + \frac{\partial f_i}{\partial t}\ .$$

1. Die kanonischen Gleichungen

Für ein System von N Massenpunkten ist die kinetische Energie bei Verwendung von kartesischen Koordinaten:

$$T = \sum_{i=1}^{s} \frac{m_i}{2}\,\dot{x}_i^2\ .$$

Wenn die potentielle Energie nicht von den Geschwindigkeiten abhängt, wie es gewöhnlich der Fall ist, sind die generalisierten Impulse:

$$p_i = m_i\,\dot{x}_i\ .$$

Dieser sehr einfache Zusammenhang hat zur Folge, daß die Konstanz des zu einer zyklischen Koordinate x_s konjugierten Impulses p_s unmittelbar auch zur Konstanz der zugehörigen Geschwindigkeit $\dot{x}_s$ führt. Für die Lagrange-Funktion gilt dann:

$$L = \sum_{i=1}^{s-1} \frac{m_i}{2}\,\dot{x}_i^2 + V(x_1, \ldots, x_{s-1}) + \frac{m_s}{2}\,\dot{x}_s^2 = \bar{L} + \frac{m_s}{2}\,\dot{x}_s^2\ .$$

Das System zerfällt also in zwei unabhängige Teilsysteme aus einerseits einem freien Teilchen und andererseits einem Restsystem mit $s-1$ Freiheitsgraden.

Im allgemeinen Fall ist das nicht mehr richtig. Der zur Variablen q_i konjugierte Impuls p_i hängt außer von dieser wesentlich von der Lagrange-Funktion des Systems ab.

Für einen Massenpunkt mit der Ladung q, der sich in einem elektrischen Feld mit dem Potential $\phi(\boldsymbol{r},t)$ bewegt, ist:

$$L = \frac{m}{2}\,\dot{\boldsymbol{r}}^2 - q\,\phi(\boldsymbol{r},t) \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{p} = m\,\dot{\boldsymbol{r}} \ .$$

Kommt aber noch ein magnetisches Feld mit dem Vektorpotential $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$ hinzu, so wird:

$$L = \frac{m}{2}\,\dot{\boldsymbol{r}}^2 - q\,\phi(\boldsymbol{r},t) + \frac{q}{c}\,\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{p} = m\,\dot{\boldsymbol{r}} + \frac{q}{c}\boldsymbol{A} \ .$$

In einem krummlinigen Koordinatensystem ist bei einer zyklischen Koordinate q_s zwar wieder p_s konstant, daraus folgt aber nicht mehr die Konstanz von $\dot{q}_s$.

Für das Keplerproblem ist:

$$L = \frac{m}{2}\,(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + \frac{\alpha}{r} \ .$$

Die Koordinate φ ist zyklisch und daher

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = m\,r^2\dot{\varphi}$$

konstant. Daraus folgt aber nicht die Konstanz von $\dot{\varphi}$, sondern die Zeitabhängigkeit von φ ist sogar recht kompliziert:

$$\varphi(t) = \arccos[\,2\,\frac{1-e^2}{e}\sum_{n=1}^{\infty} J_n(ne)\cos(n\frac{2\pi}{T}t) - e\,] \ ,$$

und die Lagrange-Funktion läßt sich nicht in der obigen Weise zerlegen.

Es liegt deshalb nahe, die generalisierten Geschwindigkeiten $\dot{q}_i$ durch die generalisierten Impulse p_i zu ersetzen, die auch generell – etwa in der Quantenmechanik – die größere physikalische Bedeutung haben, und statt der deskriptiven Funktion $L(q_1,\dots,q_s,\dot{q}_1,\dots,\dot{q}_s,t)$ eine andere zu verwenden, die von $q_1,\dots,q_s,p_1,\dots,p_s,t$ abhängt. Dazu genügt es aber nicht, die Gleichungen für die generalisierten Impulse nach den generalisierten Geschwindigkeiten aufzulösen:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i} = f_i(\dot{q}_1,\dots,\dot{q}_s) \quad \rightarrow \quad \dot{q}_i = g_i(p_1,\dots,p_s)$$

und diese Ausdrücke in die Lagrange-Funktion einzusetzen:

$$\rightarrow \quad L(q_1,\dots,q_s,g_1(\underline{p}),\dots,g_s(\underline{p}),t) \ ,$$

denn dabei geht ein Teil der Information über das System verloren.

Gegeben sei die Funktion $y = 3\,\exp(x)$. Durch Differenzieren folgt:

$$y' = 3\,\exp(x) = p \ ,$$

daraus durch Auflösen nach x:

$$x(p) = \ln(p/3)$$

und schließlich durch Einsetzen in $f(x)$:

$$y(p) = p \ .$$

Das ist aber die Differentialgleichung:

$$y = y' \ .$$

Ihre Lösungen stellen eine Kurvenschar mit einem Scharparameter c dar:

$$y = c\exp(x) \ ,$$

in der die ursprüngliche Kurve zwar für $c=3$ vorkommt, sich aber nicht in eindeutiger Weise bestimmen läßt.

Zu einer gegebenen Funktion $y(x)$ erhält man eine gleichwertige Darstellung $g(p)$ mit $p = y'$ mittels der Legendre-Transformation. Dazu löst man die Gleichung

$$y' = \frac{df}{dx} = p(x)$$

nach $x(p)$ auf, was innerhalb eines offenene Intervalls der Variablen x möglich ist, wenn dort d^2f/dx^2 nicht verschwindet. Die Legendre-Transformierte von $f(x)$ ist dann definiert durch

$$\hat{\mathcal{L}}f = g(p) = p\,x(p) - f(x(p)) \ .$$

Sie enthält die gleiche Information wie die Funktion $f(x)$, denn man kann die letztere aus ihr gewinnen. Dazu differenziert man $g(p)$ nach p:

$$\frac{dg}{dp} = x(p) + p\frac{dx}{dp} - \frac{df}{dx}\frac{dx}{dp} \ .$$

Definitionsgemäß ist aber $p = df/dx$ und daher

$$\frac{dg}{dp} = x(p) \ .$$

Löst man diese Gleichung nach $p(x)$ auf und bildet wieder die Legendre-Transformierte:

$$\hat{\mathcal{L}}g = f(x) = x\,p(x) - g(p(x)) \ ,$$

so ist diese identisch mit der ursprünglichen Funktion.

Für das obige Beispiel gilt:	$f(x) = 3\,\exp(x)$	$\rightarrow$	$g(p) = p\,\ln(p/3) - p$
und umgekehrt:	$g(p) = p\,\ln(p/3) - p$	$\rightarrow$	$f(x) = 3\,\exp(x)$.

Zu einer geometrischen Deutung des Verfahrens (Plückersche Liniengeometrie, Fig. C1) kommt man, wenn man an eine gegebene Kurve $f(x)$ in jedem Punkt (x_0, y_0) die Tangente:

$$y = p(x_0)\,x - g(x_0)$$

mit der Steigung

$$p(x_0) = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0}$$

und dem Ordinatenabschnitt

$$-\,g(x_0) = y_0 - x_0\,p(x_0)$$

legt. Die Funktion $g(p)$ stellt wieder eine Kurvenschar dar, nämlich die der Gesamtheit der Tangenten. In ihr ist die ursprüngliche Kurve $f(x)$ nicht enthalten, aber als Einhüllende (Enveloppe) dieser Geradenschar eindeutig bestimmt.

Wenn eine Kurvenschar mit dem Scharparameter p gegeben ist durch

$$F(x, y, p) = 0 \ ,$$

erhält man die Gleichung der Enveloppe, indem man diese Gleichung zuerst nach dem Scharparameter differenziert, nach p auflöst und wieder einsetzt:

$$\frac{\partial F}{\partial p} = G(x, y, p) = 0 \quad \rightarrow \quad p = p(x, y) \quad \rightarrow \quad F(x, y, p(x, y)) = 0 \ .$$

Im vorliegenden Fall handelt es sich um die Geradenschar:

$$F(x, y, p) = y - p\,x + g(p) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial p} = G(x, y, p) = -\,x + \frac{dg}{dp} = 0 \ .$$

Durch Auflösen nach $p(x)$ und Einsetzen folgt hier

$$y - x\,p(x) + g(p(x)) = 0 \ ,$$

was mit $\hat{\mathcal{L}}g$ übereinstimmt.

Für eine Funktion mit mehreren unabhängigen Veränderlichen $f(x_1,\ldots,x_n)$ gilt entsprechend:

$$p_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad \to \quad x_i = x_i(p_1,\ldots,p_n) \ ,$$

Dabei wird vorausgesetzt, daß innerhalb eines offenen s-dimensionalen Intervalls der Variablen x_i die Determinante $\det(\partial^2 f/\partial x_i \partial x_j)$ nicht verschwindet, so daß man die Gleichungen für die p_i nach den x_i auflösen kann. Die Legendre-Transformierte ist dann:

$$g(p_1,\ldots,p_n) = \sum_{i=1}^{n} p_i\, x_i(\underline{p}) - f(x_1(\underline{p}),\ldots,x_n(\underline{p})) \ .$$

Die Legendre-Transformierte der Lagrange-Funktion $L(q_1,\ldots,q_s,\dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_s,t)$ bezüglich der $\dot{q}_i$ ist die Hamilton-Funktion:

$$H(q_1,\ldots,q_s,p_1,\ldots,p_s,t) = \sum_{i=1}^{s} p_i\, \dot{q}_i(\underline{p}) - L(q_1,\ldots,q_s,\dot{q}_1(\underline{p}),\ldots,\dot{q}_s(\underline{p}),t) \ .$$

Die übrigen Variablen q_i und t werden durch die Legendre-Transformation nicht berührt.

Für physikalisch sinnvolle Lagrange-Funktionen ist die Auflösungsbedingung, das Nichtverschwinden der Hesse-Determinante ("Hessian"):

$$\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}\right) \neq 0 \ ,$$

stets erfüllt, und die Hamilton-Funktion läßt sich konstruieren.

Für ein System von Massenpunkten einschließlich eines äußeren elektromagnetischen Feldes hat die Lagrange-Funktion die Gestalt

$$L(q_i,\dot{q}_i,t) = T_2(q_i,\dot{q}_i,t) + T_1(q_i,\dot{q}_i,t) + T_0(q_i,t) - V_0(q_i,t) - V_1(q_i,\dot{q}_i,t) \ .$$

Dabei ist T_2 eine positiv-definite quadratische Form in den $\dot{q}_i$, während T_1 und V_1 nur linear davon abhängen:

$$T_2 = \sum_{i,k} a_{ik}\, \dot{q}_i \dot{q}_k \ , \ T_1 = \sum_i b_i\, \dot{q}_i \ , \ V_1 = \sum_i c_i\, \dot{q}_i \quad \to \quad \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} = \frac{\partial^2 T_2}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \ .$$

Die Determinante der Matrix (a_{ik}) verschwindet nicht und ist ersichtlich identisch mit der Hesse-Determinanten.

Umgekehrt muß es aber zu einer gegebenen Hamilton-Funktion nicht immer eine entsprechende Lagrange-Funktion geben.

Das gilt insbesondere für die später betrachtete Hamilton-Funktion $H(q_i,p_i,t) \equiv 0$.

Wenn jedoch die entsprechende Bedingung:

$$\det\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j}\right) \neq 0$$

erfüllt ist, folgt aus der Hamilton-Funktion $H(q_1,\ldots,q_s,p_1,\ldots,p_s,t)$ durch Legendre-Transformation die Lagrange-Funktion:

$$L(q_1,\ldots,q_s,\dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_s,t) = \sum_{i=1}^{s} \dot{q}_i\, p_i(\underline{\dot{q}}) - H(q_1,\ldots,q_s,p_1(\underline{\dot{q}}),\ldots,p_s(\underline{\dot{q}}),t) \ .$$

Während die $\dot{q}_i$ in der Lagrange-Funktion stets abhängig von den q_i bleiben, haben die q_i und die p_i in der Hamilton-Funktion den gleichen Status. Im Gegensatz zu L hat H in den meisten Fällen eine unmittelbare physikalische Bedeutung. Für ein System, dessen Lagrange-Funktion sich in der Form

$$L = T(q_i, \dot{q}_i, t) - V(q_i, t)$$

schreiben läßt und außerdem T eine homogen-quadratische Funktion der $\dot{q}_i$ ist (natürliches System), stimmt H, wie schon im Kapitel B gezeigt wurde, mit der Gesamtenergie $T + V$ des Systems überein.

Die deskriptive Funktion $L(q_1, \ldots, q_s, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_s, t)$ ist definiert über dem s-dimensionalen Konfigurationsraum ("configuration space"), dessen Achsen durch die q_i bezeichnet werden. Bei der zeitlichen Entwicklung des Systems beschreibt der repräsentative Punkt (Mobile) die Konfigurationsbahn. Durch jeden Punkt P des Konfigurationsraumes geht eine s-parametrige Schar von (aktualen) Konfigurationsbahnen $\underline{q}(t)$, die sich in $\dot{\underline{q}}(\mathrm{P})$ unterscheiden und deren Punkte durch den Parameter t festgelegt werden. Erweitert man den Konfigurationsraum durch Hinzunahme (Kronecker-Produkt) einer t-Achse, so erhält man den Ereignisraum ("event space"), in dem das Mobile die sogenannte Weltlinie ("world line") beschreibt. Die Konfigurationsbahn ist dann die Projektion der Weltlinie auf den Konfigurationsraum.

Für einen eindimensionalen harmonischen Oszillator ist die Weltlinie die Kurve $q_0 \sin(\omega t)$, die Konfigurationsbahn das Intervall $-q_0 \leq q \leq +q_0$.

Die deskriptive Funktion $H(q_1, \ldots, q_s, p_1, \ldots, p_s, t)$ ist dagegen definiert über dem $2s$-dimensionalen Phasenraum ("phase space"). Er ist das Kroneckerprodunkt von s zweidimensionalen Blättern für die zusammengehörigen (kanonisch-konjugierten) Paare von Variablen q_i, p_i. Das System wird jetzt dargestellt durch einen repräsentativen Punkt, der bei der zeitlichen Entwicklung des Systems die Phasenbahn ("phase trajectory", "phase portrait") beschreibt. Im Gegensatz zum Konfigurationsraum geht durch jeden Punkt nur eine Phasenbahn (Trajektorie). Ihre Punkte sind wieder festgelegt durch die Werte des Parameters t. Die Erweiterung durch eine t-Achse erzeugt den $(2s+1)$-dimensionalen Zustandsraum ("state space").

Für den eindimensionalen harmonischen Oszillator ist die Hamilton-Funktion

$$H = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{k}{2} q^2$$

eine Erhaltungsgröße mit dem Wert E. Daraus folgt:

$$\frac{p^2}{(2mE)} + \frac{q^2}{(2E/k)} = 1 \ .$$

Für gegebene Energie E ist die Phasenbahn also eine Ellipse mit den Halbachsen $(2mE)^{1/2}$ und $(2E/k)^{1/2}$. Im Zustandsraum entsteht dann eine Schraubenlinie auf einem elliptischen Zylinder. Ihre Projektion auf die (q,t)-Ebene ergibt die sinusförmige Weltlinie, auf die (q,p)-Ebene die elliptische Phasenbahn (Fig. C2).

Auch die Phasenbahnen gehorchen dem Hamiltonschen Prinz der stationären Wirkung, und aus ihm lassen sich die entsprechenden Bewegungsgleichungen ableiten. Für Systeme, für die eine Lagrange-Funktion existiert, kann man sie aber einfacher aus den Lagrange-Gleichungen gewinnen. Das totale Differential von H ist einerseits:

$$dH = \sum_{i=1}^{s} \Big(\frac{\partial H}{\partial q_i} \, dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \, dp_i \Big) + \frac{\partial H}{\partial t} \, dt \ ,$$

andererseits folgt aus dem Zusammenhang mit L:

$$dH = \sum_{i=1}^{s} \Big(\dot{q}_i \, dp_i + p_i \, d\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} \, dq_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \, d\dot{q}_i \Big) - \frac{\partial L}{\partial t} \, dt \ .$$

Wegen der Definition $p_i = \partial L / \partial \dot{q}_i$ heben sich die Beiträge mit $\dot{q}_i$ auf. Aus den Lagrange-Gleichungen ergibt sich weiter:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \Big) = \dot{p}_i \ ,$$

und es folgt für die zweite Darstellung von dH:

$$dH = \sum_{i=1}^{s} (\dot{q}_i \, dp_i - \dot{p}_i \, dq_i) - \frac{\partial L}{\partial t} \, dt \ .$$

Der Vergleich führt wegen der Unabhängigkeit der Argumente q_i, p_i, t der Hamilton-Funktion einerseits zu:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = - \frac{\partial L}{\partial t} \ ,$$

andererseits zu den kanonischen Bewegungsgleichungen:

$$\dot{q}_i = + \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad , \quad \dot{p}_i = - \frac{\partial H}{\partial q_i} \ ,$$

die an die Stelle der Lagrange-Gleichungen treten. Statt des von diesen gebildeten Systems von s gewöhnlichen Differentialgleichungen 2. Ordnung für die gesuchten Funktionen $q_i(t)$ handelt es sich hier um ein System von $2s$ Gleichungen 1. Ordnung für die gesuchten Funktionen $q_i(t)$ und $p_i(t)$.

Für den harmonischen Oszillator ist:

$$L = \frac{m}{2} \dot{q}^2 - \frac{k}{2} q^2 \quad \to \quad p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m \, \dot{q} \ .$$

Damit ergibt sich als Hamilton-Funktion:

$$H = \frac{p^2}{m} - \Big(\frac{p^2}{2m} - \frac{k}{2} q^2 \Big) = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{k}{2} q^2$$

und als kanonische Gleichungen:

$$\dot{q} = + \frac{1}{m} p \quad , \quad \dot{p} = -k \, q \ .$$

Hier läßt sich p bzw. $\dot{p}$ durch Ableitung der ersten Gleichung nach t eliminieren:

$$\ddot{q} + \frac{k}{m} q = 0 \ .$$

Das allgemeine Integral dieser Differentialgleichung ist mit der Abkürzung $\omega = \sqrt{k/m}$:

$$q(t) = a_1 \cos(\omega t) + a_2 \sin(\omega t) \ .$$

Aus der ersten kanonischen Gleichung folgt dann:

$$p(t) = -m\omega [a_1 \sin(\omega t) - a_2 \cos(\omega t)]$$

in Übereinstimmung mit den früheren Resultaten.

Für die bisher betrachteten Systeme ist die Lagrange-Funktion eine quadratische Form in den $\dot{q}_i$, die s Impulse sind folglich lineare Ausdrücke in den $\dot{q}_i$. Setzt man diese in die linken Seiten des zweiten Satzes von kanonischen Gleichungen ein, so entsteht ein System von s gekoppelten Differentialgleichungen 2. Ordnung für die $q_i(t)$, das dem System der Lagrange-Gleichungen äquivalent ist.

Eine zyklische Variable q_k ist dadurch definiert, daß sie nicht explizit in der Lagrange-Funktion auftritt:

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \ .$$

Ihr konjugierter Impuls p_k ist ein Bewegungsintegral:

$$\dot{p}_k = 0 \ .$$

Dann folgt aber aus den kanonischen Gleichungen:

$$\frac{\partial H}{\partial q_k} = 0 \ ,$$

Die Hamilton-Funktion hängt also ebenfalls nicht explizit von q_k ab. Durch Umnumerierung läßt sich stets erreichen, daß $k = s$ ist. Im System der Bewegungsgleichungen für die $q_i(t), p_i(t)$ kann man dann $p_s(t)$ durch seinen konstanten Wert c_s ersetzen. Die Zahl der Freiheitsgrade erniedrigt sich dadurch auf $s-1$. Fall sich dieses reduzierte System integrieren läßt, ergeben sich $q_s(t)$ und $p_s(t)$ durch Quadraturen:

$$\begin{aligned} \dot{q}_s &= +\frac{\partial H}{\partial p_s} = f(q_1(t), \ldots, q_{s-1}(t), p_1(t), \ldots, p_{s-1}(t), c_s, t) \\ \dot{p}_s &= -\frac{\partial H}{\partial q_s} = g(q_1(t), \ldots, q_{s-1}(t), p_1(t), \ldots, p_{s-1}(t), c_s, t) \ . \end{aligned}$$

Wenn alle s Koordinaten q_i zyklisch sind, ist das Problem auf $2s$ Quadraturen zurückgeführt und somit gelöst. Gleichbedeutend damit garantiert auch die Existenz von s unabhängigen Bewegungsintegralen, die sich als konjugierte Impulse zu zyklischen Koordinaten darstellen lassen, die Integrabilität des Systems der Bewegungsgleichungen. Wegen der gleichberechtigten Rolle der q_i und p_i in der Hamilton-Funktion kann auch ein Impuls p_k eine zyklische Variable sein. Aus

$$\frac{\partial H}{\partial p_k} = 0$$

folgt nämlich mit Hilfe der kanonischen Gleichungen:

$$\dot{q}_k = 0 \quad \rightarrow \quad q_k \equiv c_k \ ,$$

q_k ist also ein Bewegungsintegral. Im Gegensatz zur Lagrange-Formulierung ist es in der Hamilton-Formulierung daher möglich, daß alle der maximal vorhandenen $2s$ Bewegungsintegrale zyklischen Variablen zugeordnet sind.

Für den freien symmetrischen Kreisel ist die Lagrange-Funktion:

$$L = \frac{\Theta_1}{2}\,(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2\vartheta\,\dot{\varphi}^2) + \frac{\Theta_3}{2}\,(\dot{\varphi}\cos\vartheta + \dot{\psi})^2 \ .$$

Daraus ergeben sich die generalisierten Impulse:

$$\begin{aligned} p_\varphi &= (\Theta_1 \sin^2\vartheta + \Theta_3 \cos^2\vartheta)\dot{\varphi} + \Theta_3 \cos\vartheta\,\dot{\psi} \\ p_\vartheta &= \Theta_1 \dot{\vartheta} \\ p_\psi &= \Theta_3 \cos\vartheta\,\dot{\varphi} + \Theta_3 \dot{\psi} \ . \end{aligned}$$

Die Hesse-Determinante dieses linearen Gleichungssystems ist $\Theta_1^2 \Theta_3 \sin^2 \vartheta$, es läßt sich daher für $\vartheta \neq 0, \pi$ nach den $\dot{q}_i$ auflösen:

$$\begin{aligned}
\dot{\varphi} &= \frac{1}{\Theta_1 \sin^2\vartheta}\, p_\varphi - \frac{\cos\vartheta}{\Theta_1 \sin^2\vartheta}\, p_\psi \\
\dot{\vartheta} &= \frac{1}{\Theta_1}\, p_\vartheta \\
\dot{\psi} &= -\frac{\cos\vartheta}{\Theta_1 \sin^2\vartheta}\, p_\varphi + \Big(\frac{1}{\Theta_3} + \frac{\cos^2\vartheta}{\Theta_1 \sin^2\vartheta}\Big) p_\psi \ .
\end{aligned}$$

Durch Legendre-Transformation folgt daraus:

$$H = \frac{1}{2\Theta_1}\Big[\frac{(p_\varphi - p_\psi \cos\vartheta)^2}{\sin^2\vartheta} + p_\vartheta^2\Big] + \frac{1}{2\Theta_3}\, p_\psi^2 \ .$$

Damit ergeben sich die kanonischen Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\dot{\varphi} &= +\frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{1}{\Theta_1 \sin^2\vartheta}\,(p_\varphi - p_\psi \cos\vartheta) \quad , \quad \dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0 \\
\dot{\vartheta} &= +\frac{\partial H}{\partial p_\vartheta} = \frac{1}{\Theta_1}\, p_\vartheta \quad , \quad \dot{p}_\vartheta = -\frac{\partial H}{\partial \vartheta} = \frac{(p_\varphi - p_\psi \cos\vartheta)(p_\psi - p_\varphi \cos\vartheta)}{\Theta_1 \sin^3\vartheta} \\
\dot{\psi} &= +\frac{\partial H}{\partial p_\psi} = -\frac{\cos\vartheta}{\Theta_1 \sin^2\vartheta}\,(p_\varphi - p_\psi \cos\vartheta) + \frac{1}{\Theta_3}\, p_\psi \quad , \quad \dot{p}_\psi = -\frac{\partial H}{\partial \psi} = 0 \ .
\end{aligned}$$

φ und ψ sind also zyklische Koordinaten, und es gilt:

$$p_\varphi \equiv c_1 \quad , \quad p_\psi \equiv c_2 \ .$$

Das System der sechs Bewegungsgleichungen reduziert sich daher auf die beiden Gleichungen für ϑ und p_ϑ, aus denen sich p_ϑ in der üblichen Weise eliminieren läßt. Es entsteht die schon früher behandelte Differentialgleichung 2. Ordnung:

$$\ddot{\vartheta} = \frac{(c_1 - c_2 \cos\vartheta)(c_2 - c_1 \cos\vartheta)}{\Theta_1^2 \sin^3\vartheta}$$

für $\vartheta(t)$. Bei bekanntem $\vartheta(t)$ folgen die beiden anderen Koordinaten dann aus

$$\dot{\varphi} = \frac{c_1 - c_2 \cos\vartheta}{\Theta_1 \sin^2\vartheta} \quad , \quad \dot{\psi} = \frac{c_2}{\Theta_3} - \frac{(c_1 - c_2 \cos\vartheta)\cos\vartheta}{\Theta_1 \sin^2\vartheta}$$

durch Quadraturen.

Die Hamilton-Formulierung führt, was die Integration der Bewegungsgleichungen angeht, nur im Falle zyklischer Koordinaten zu einem Vorteil gegenüber der Lagrange-Formulierung. Die Legendre-Transformation wird daher manchmal auf die zyklischen q_i beschränkt, während bei den übrigen, etwa für $i = 1, \ldots, m$, die $\dot{q}_i$ beibehalten werden. Dann entsteht eine weitere deskriptive Funktion, die Routh-Funktion

$$R(q_1, \ldots, q_s, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_m, p_{m+1}, \ldots, p_s, t) \ .$$

Sie wird im folgenden nicht weiter betrachtet.

2. Poisson-Klammern

Als dynamische Größen bezeichnet man Funktionen $f(q_i, p_i, t)$ der dynamischen Variablen q_i und p_i. Sie ändern sich im allgemeinen bei der Bewegung des Systems in einer Bahn $q_i(t), p_i(t)$ mit der Zeit:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{s} \Big(\frac{\partial f}{\partial q_i}\, \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i}\, \dot{p}_i\Big) \ .$$

Durch Einsetzen von $\dot{q}_i$ und $\dot{p}_i$ aus den kanonischen Bewegungsgleichungen ergibt sich:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{s} \Big(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i} \Big) \ .$$

Die Poisson-Klammer von zwei Funktionen $f(q_i, p_i, t)$ und $g(q_i, p_i, t)$ wird allgemein definiert durch:

$$[f, g] = \sum_{i=1}^{s} \Big(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i} \Big) \ .$$

Sie ist wieder eine Funktion von q_i, p_i und t und stellt in gewissem Sinn das skalare Produkt (symplektische Bilinearform) im Phasenraum dar, worauf hier aber nicht weiter eingegangen werden soll. Sie ist bezüglich beider Faktoren distributiv:

$$[c_1 f_1 + c_2 f_2, g] = c_1[f_1, g] + c_2[f_2, g]$$

mit konstantem c_1 und c_2, analog für den rechten Faktor. Weiterhin ist sie antisymmetrisch:

$$[g, f] = -[f, g] \quad \rightarrow \quad [f, f] = 0 \ .$$

Wenn die Poisson-Klammer von zwei Funktionen f und g verschwindet, sagt man, daß f und g in Involution stehen. Die Poisson-Klammer mit einer Konstanten verschwindet:

$$[f, c] = 0 \ .$$

Für Produkte gilt, wie bei der Differentiation, die Leibniz-Regel

$$[f_1 f_2, g] = [f_1, g] f_2 + f_1 [f_2, g] \ ,$$

daraus erhält man nach einiger Rechnung die Jacobi-Identität:

$$[f_1, [f_2, f_3]] + [f_2, [f_3, f_1]] + [f_3, [f_2, f_1]] = 0 \ .$$

Eine dynamische Größe f steht mit jeder ihrer Potenzen in Involution:

$$[f, f^n] = 0 \ .$$

Daraus folgt für beliebige analytische Funktionen $F(f)$:

$$[f, F(f)] = [f, a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 + \ldots] = 0 \ .$$

Die Ableitung nach einem Parameter, insbesondere der Zeit t, ergibt:

$$\frac{\partial}{\partial t}[f, g] = [\frac{\partial f}{\partial t}, g] + [f, \frac{\partial g}{\partial t}] \ .$$

Wählt man als einen der Faktoren die Variablen q_i oder p_i selbst, so wird

$$[\, q_i, f] = +\frac{\partial f}{\partial p_i} \quad , \quad [\, p_i, f] = -\frac{\partial f}{\partial q_i} \ .$$

Speziell für $f = H$ folgen daraus die Beziehungen

$$[\, q_i, H] = +\frac{\partial H}{\partial p_i} \quad , \quad [\, p_i, H] = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

und für $f = q_k$ und $f = p_k$ die fundamentalen Poisson-Klammern:

$$[\,q_i, q_k] = 0 \quad , \quad [\,p_i, p_k] = 0 \quad , \quad [\,q_i, p_k] = \delta_{ik} \ ,$$

die im folgenden häufig benutzt werden.

Die Änderung einer dynamischen Größe $f(\underline{q}, \underline{p}, t)$ mit der Zeit durch die Bewegung längs einer Bahn $q_i(t), p_i(t)$ läßt sich mit Hilfe der Poisson-Klammern schreiben als:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + [f, H] = 0 \ .$$

Für $f = q_i$ und $f = p_i$ ergeben sich daraus wieder die kanonischen Gleichungen:

$$\dot{q}_i = [\,q_i, H] = +\frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \to \quad \dot{p}_i = [\,p_i, H] = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \ .$$

Ein Bewegungsintegral $f(q_i, p_i, t)$ ist dadurch definiert, daß sein Wert bei der Bewegung eines Systems in einer Bahn $q_i(t), p_i(t)$ zeitlich konstant ist:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + [f, H] = 0 \ ,$$

wobei diese Konstanz nicht nur für bestimmte Bahnen, sondern für deren Gesamtheit gelten soll. Das Kriterium dafür, daß f eine Erhaltungsgröße ist, lautet daher:

$$[f, H] = 0 \ ,$$

f und H müssen also in Involution stehen.

Für das ebene Kepler-Problem mit der Hamilton-Funktion:

$$H = \frac{1}{2m}\,(p_x^2 + p_y^2) - \alpha\,(x^2 + y^2)^{-1/2}$$

ist die z-Komponente des Drehimpulses $L_z = x\,p_y - y\,p_x$ eine Erhaltungsgröse, denn ihre Poisson-Klammer mit H verschwindet:

$$[L_z, H] = p_y\,\frac{p_x}{m} - \alpha x y\,(x^2 + y^2)^{-3/2} - p_x\,\frac{p_y}{m} + \alpha x y\,(x^2 + y^2)^{-3/2} = 0,$$

nicht dagegen die Funktion $f = m\,r^2 = m\,(x^2 + y^2)$, denn

$$[f, H] = 2\,(x\,p_x + y\,p_y) = 2\,r p_r = 2\,\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{p}$$

verschwindet für einzelne Bahnen, nämlich die Kreisbahnen, nicht jedoch für den allgemeinen Fall der elliptischen Bahn.

Für eine zyklische Koordinate q_k gilt definitionsgemäß $\partial H / \partial q_k = 0$. Andererseits ist:

$$[\,p_k, H] = \sum_{i=1}^{s} \Big(\frac{\partial p_k}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial p_k}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i} \Big) = \sum_{i=1}^{s} \Big(0 \cdot \frac{\partial H}{\partial p_i} - \delta_{ik}\frac{\partial H}{\partial q_i} \Big) = \frac{\partial H}{\partial q_k} = 0 \ ,$$

in Übereinstimmung mit der obigen Beziehung. Analoges gilt für zyklische Impulse.

Wenn zwei Bewegungsintegrale f und g gegeben sind:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + [f, H] = 0 \quad , \quad \frac{dg}{dt} = \frac{\partial g}{\partial t} + [g, H] = 0 \ ,$$

so folgt durch Auflösen nach $[f,H]$ und $[g,H]$ und Einsetzen in die Jacobi-Identität:

$$[f,[g,H]] + [g,[h,f]] + [H,[f,g]] = 0 \quad \rightarrow \quad [\frac{\partial f}{\partial t}, g] + [f, \frac{\partial g}{\partial t}] + [[f,g],H] = 0$$

und daraus durch Benutzung der Leibniz-Regel:

$$\frac{\partial}{\partial t}[f,g] + [[f,g],H] = 0 \ .$$

Die Poisson-Klammer zweier Bewegungsintegrale ist also ebenfalls ein Bewegungsintegral, allerdings ergeben sich in den meisten Fällen nur schon bekannte oder triviale Bewegungsintegrale, insbesondere für Bewegungsintegrale, die in Involution stehen, die Null.

Für einen freien Massenpunkt ($s = 3$) ist die Hamilton-Funktion:

$$H = \frac{1}{2m}\,(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) \ .$$

Aus den beiden Erhaltungsgrößen:

$$f = p_x \quad , \quad g = x\,p_y - y\,p_x$$

ergibt sich als weitere Erhaltungsgröße:

$$[f,g] = [p_x, x\,p_y - y\,p_x] = -\,p_y \ ,$$

der zur zyklischen Variablen y konjugierte Impuls. Auf dem gleichen Wege erhält man:

$$[p_x, p_y] = 0 \ ,$$

also ein triviales Bewegungsintegral.

Wenn die Hamilton-Funktion eines Systems nicht explizit von der Zeit abhängt, ist sie wegen

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + [H,H] = \frac{\partial H}{\partial t} = 0$$

selbst eine Erhaltungsgröße. Falls die kinetische Energie homogen-quadratisch in den p_i ist, handelt es sich dabei um die Gesamtenergie. Für alle Erhaltungsgrößen f gilt:

$$[f,H] = 0 \ ,$$

sie stehen also in Involution mit der Hamilton-Funktion des Systems, aber nicht notwendig miteinander.

Für den Massenpunkt im homogenen Schwerefeld mit der Hamilton-Funktion

$$H = \frac{1}{2m}\,(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + m\,g\,z$$

sind p_x, p_y und L_z unabhängige Erhaltungsgrößen. Es gilt:

$$[p_x, p_y] = 0 \ ,$$

diese beiden Größen stehen also in Involution miteinander, aber nicht mit L_z:

$$[p_x, L_z] = -\,p_y \quad , \quad [p_y, L_z] = +\,p_x \ .$$

Die ebenfalls unabhängigen Erhaltungsgrößen p_x, p_y, H stehen dagegen in Involution. Da ihre Anzahl der Zahl s der Freiheitsgrade entspricht, ist das System also integrabel, und die restlichen Integrationen beschränken sich auf Quadraturen.

3. Kanonische Transformationen

Die Lagrange-Gleichungen sind forminvariant gegenüber beliebigen Punkttransformationen, also gegenüber einem Wechsel des Koordinatensystems im Konfigurationsraum, weil sie aus dem Hamilton-Prinzip folgen:

$$\delta S = \delta \int\limits_{t_a}^{t_b} L\, dt = 0 \ .$$

Die Lagrange-Funktion ist eine physikalische Größe, deren Wert nur abhängt vom momentanen Zustand des Systems, nicht aber von der Auswahl der Koordinaten q_i, die zu seiner Beschreibung benutzt werden. Trifft man eine bestimmte solche Wahl, so folgen aus dem Variationsproblem

$$\delta \int\limits_{t_a}^{t_b} L(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t)\, dt = 0$$

als Euler-Gleichungen die Bewegungsgleichungen von Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\Big) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \ .$$

Durch die Transformation der q_i sind die der $\dot{q}_i$ festgelegt und notwendig linear. Diese Einschränkung führt dazu, daß durch Punkttransformationen allein nicht alle Koordinaten zyklisch gemacht werden können. Wegen des gleichen Status der q_i, p_i in der Hamilton-Funktion liegt es nahe, allgemeinere Transformationen der Gestalt

$$Q_i = Q_i(q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s, t) \quad , \quad P_i = P_i(q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s, t)$$

zu untersuchen, bei denen die kanonischen Gleichungen forminvariant sind:

$$\dot{Q}_i = + \frac{\partial K}{\partial P_i} \quad , \quad \dot{P}_i = - \frac{\partial K}{\partial Q_i} \ ,$$

wobei die neue Hamilton-Funktion K aus der alten H durch Ersatz der Variablen entsteht:

$$K(\underline{Q}, \underline{P}, t) = H(\underline{q}(\underline{Q}, \underline{P}, t), \underline{p}(\underline{Q}, \underline{P}, t), t) \ .$$

Solche Transformationen heißen kanonisch im engeren Sinne. Sie bilden eine Gruppe, die die zeitunabhängigen Punkttransformationen als Untergruppe enthält, nicht aber die zeitabhängigen. Für die kanonischen Transformationen im weiteren Sinne, im folgenden kurz kanonische Transformationen genannt, wird deshalb nur gefordert, daß es eine Funktion $K(Q_i, P_i, t)$ geben soll, die zu kanonischen Bewegungsgleichungen führt.

Das für den Konfigurationsraum formulierte Hamilton-Prinzip

$$\delta \int\limits_{t_a}^{t_b} L(\underline{q}, \dot{q}, t)\, dt = \delta \int\limits_{t_a}^{t_b} \Big[\sum_{i=1}^{s} p_i(\underline{q}, \underline{\dot{q}})\dot{q}_i - H(\underline{q}, \underline{\dot{p}}(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t), t)\Big]\, dt = 0$$

setzt die Existenz einer Lagrange-Funktion voraus und muß für den Phasenraum modifiziert werden. Man betrachtet dazu die Funktion:

$$\tilde{L}(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, \underline{p}, \underline{\dot{p}}, t) = \sum_{i=1}^{s} p_i\, \dot{q}_i - H(\underline{q}, \underline{p}, t) \ ,$$

in der die Variablen $\dot{p}_i$ allerdings nicht explizit auftreten. Das erweiterte Hamilton-Prinzip

$$\delta \int_{t_a}^{t_b} \tilde{L}(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, \underline{p}, \underline{\dot{p}}, t)\, dt = 0 \ ,$$

wobei die q_i und p_i unabhängig voneinander variiert werden und an den Intervallgrenzen

$$\delta q_i(t_a) = \delta p_i(t_a) = \delta q_i(t_b) = \delta p_i(t_b) = 0$$

gilt, führt zu den $2s$ Euler-Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_i}\Big) - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q_i} = 0 \quad &\rightarrow \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \\ \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{p}_i}\Big) - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial p_i} = 0 \quad &\rightarrow \quad \dot{q}_i = +\frac{\partial H}{\partial p_i} \ , \end{aligned}$$

dabei wurde benutzt, daß

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_i} = p_i \quad , \quad \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{p}_i} = 0 \ .$$

Es ergeben sich also die kanonischen Bewegungsgleichungen. Das erweiterte Hamilton-Prinzip gilt auch für den Fall, daß es zu einer gegebenen Hamilton-Funktion keine entsprechende Lagrange-Funktion gibt. Man kann aber zeigen, daß falls eine Lagrange-Funktion existiert, das ursprüngliche und das erweiterte Hamilton-Prinzip zu den gleichen Konsequenzen führen.

Daß Koordinaten und Impulse in der Hamilton-Formulierung der Mechanik den gleichen Status haben, bedeutet nicht, daß sie bei kanonischen Transformationen in völlig unabhängiger Weise transformiert werden. Sowohl für die alten Variablen q_i, p_i als auch für die neuen Q_i, P_i muß das erweiterte Hamilton-Prinzip gelten:

$$\delta \int_{t_a}^{t_b} \Big[\sum_{i=1}^{s} p_i\, \dot{q}_i - H(\underline{q}, \underline{p}, t)\Big]\, dt = 0 \quad , \quad \delta \int_{t_a}^{t_b} \Big[\sum_{i=1}^{s} P_i\, \dot{Q}_i - K(\underline{Q}, \underline{P}, t)\Big]\, dt = 0$$

$$\rightarrow \quad \delta \int_{t_a}^{t_b} \Big[\sum_{i=1}^{s} p_i\, \dot{q}_i - H(\underline{q}, \underline{p}, t) - \sum_{i=1}^{s} P_i\, \dot{Q}_i + K(\underline{Q}, \underline{P}, t)\Big]\, dt = 0 \quad .$$

Aus der letzten Beziehung folgt, daß der Integrand die totale Ableitung einer Funktion F nach der Zeit sein muß, es gilt also:

$$\sum_{i=1}^{s} p_i\, \dot{q}_i - H(\underline{q}, \underline{p}, t) = \sum_{i=1}^{s} P_i\, \dot{Q}_i - K(\underline{Q}, \underline{P}, t) + \frac{dF}{dt} \ .$$

$F(\underline{q}, \underline{p}, \underline{Q}, \underline{P}, t)$ nennt man die erzeugende Funktion ("generating function") der Transformation. Ihre $4s+1$ Argumente sind nicht unabhängig voneinander, da zwischen den $\underline{q}, \underline{p}$ und dem $\underline{Q}, \underline{P}$ die kanonischen Transformationsgleichungen bestehen. Man muß daher aus ihnen $2s+1$ (einschließlich der Zeit t) auswählen, dabei müssen alte und neue Variable wegen der Umkehrbarkeit der Transformation in gleicher Anzahl vertreten sein. Es ergeben sich damit vier Grundtypen.

a) $F_1(\underline{q}, \underline{Q}, t)$

Die obige Bedingung führt zu

$$\sum_{i=1}^{s} p_i\, \dot{q}_i - H(\underline{q}, \underline{p}, t) = \sum_{i=1}^{s} P_i\, \dot{Q}_i - K(\underline{Q}, \underline{P}, t) + \frac{dF_1}{dt}\ .$$

Für die totale Ableitung von F_1 nach der Zeit gilt

$$\frac{dF_1}{dt} = \sum_{i=1}^{s} \Big(\frac{\partial F_1}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \dot{Q}_i \Big) + \frac{\partial F_1}{\partial t}\ .$$

Durch Einsetzen folgt wegen der Unabhängigkeit der q_i, Q_i:

$$p_i = +\frac{\partial F_1}{\partial q_i} \quad , \quad P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \quad , \quad K = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}\ .$$

Aus den ersten s Gleichungen lassen sich die Q_i eliminieren:

$$Q_i = Q_i(\underline{q}, \underline{p}, t)\ .$$

Durch Einsetzen in die zweiten s Gleichungen ergibt sich dann:

$$P_i = P_i(\underline{q}, \underline{p}, t)$$

und damit die vollständige kanonische Transformation.

Als Beispiel wird betrachtet die Funktion

$$F_1(\underline{q}, \underline{Q}, t) = \sum_{i=1}^{s} q_i\, Q_i\ .$$

Sie führt zu den Transformationsgleichungen

$$p_i = +\frac{\partial F_1}{\partial q_i} = Q_i \quad , \quad P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i} = -\,q_i \quad , \quad K = H + \frac{\partial F_1}{\partial t} = H$$

und daraus durch Umstellung zu

$$Q_i = +\,p_i \quad , \quad P_i = -\,q_i\ .$$

Bis auf das Vorzeichen werden also die Rollen von Koordinaten und Impulsen vertauscht.

b) $F_2(\underline{q}, \underline{P}, t)$

Gegenüber F_1 werden die Q_i ersetzt durch:

$$P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i}\ .$$

Das läßt sich durch eine Legendre-Transformation erreichen:

$$F_2(\underline{q}, \underline{P}, t) = F_1(\underline{q}, \underline{Q}, t) + \sum_{i=1}^{s} P_i\, Q_i\ .$$

Auflösen nach F_1 und Einsetzen in die Bedingung der Kanonizität ergibt

$$\sum_{i=1}^{s} p_i\, \dot{q}_i - H(\underline{q}, \underline{p}, t) = \sum_{i=1}^{s} P_i\, \dot{Q}_i - K(\underline{Q}, \underline{P}, t) + \frac{dF_2}{dt} - \frac{d}{dt}\Big(\sum_{i=1}^{s} Q_i P_i \Big)\ .$$

Die totale Ableitung von F_2 ist:

$$\frac{dF_2}{dt} = \sum_{i=1}^{s} \Big(\frac{\partial F_2}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F_2}{\partial P_i} \dot{P}_i \Big) + \frac{\partial F_2}{\partial t} \ .$$

Durch Einsetzen und Vergleich folgt hier:

$$p_i = + \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \quad , \quad Q_i = + \frac{\partial F_2}{\partial P_i} \quad , \quad K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t} \ .$$

Die allgemeine Punkttransformation wird erzeugt durch:

$$F_2(\underline{q}, \underline{P}, t) = \sum_{i=1}^{s} f_i(\underline{q}, t) P_i \ .$$

Es ergibt sich:

$$p_i = \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial f_k}{\partial q_i} P_k \quad , \quad Q_i = f_i(\underline{q}, t) \quad , \quad K = H + \frac{\partial f_k}{\partial t} \ .$$

Damit ist gezeigt, daß, wie oben behauptet, alle Punkttransformationen zugleich auch kanonisch sind und daß für zeitunabhängige $K = H$ gilt. Speziell für $f_i(\underline{q}) = q_i$ erhält man:

$$Q_i = q_i \quad , \quad P_i = p_i \ ,$$

also die identische Transformation.

c) $F_3(\underline{p}, \underline{Q}, t)$

Gegenüber F_1 wird q_i ersetzt durch:

$$p_i = + \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \ .$$

Die entsprechende Legendre-Transformation ist:

$$F_3(\underline{q}, \underline{P}, t) = F_1(\underline{q}, \underline{Q}, t) - \sum_{i=1}^{s} p_i \, q_i \ .$$

Das gleiche Auflösungs- und Einsetzungsverfahren wie in den beiden vorigen Fällen ergibt:

$$q_i = - \frac{\partial F_3}{\partial p_i} \quad , \quad P_i = - \frac{\partial F_3}{\partial Q_i} \quad , \quad K = H + \frac{\partial F_3}{\partial t} \ .$$

d) $F_4(\underline{p}, \underline{P}, t)$

Hier werden gegenüber F_1 die Variablen q_i und Q_i ersetzt durch:

$$p_i = + \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \quad , \quad P_i = - \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \ ,$$

die zugehörige Legendre-Transformation ist dann:

$$F_4(\underline{p}, \underline{P}, t) = F_1(\underline{q}, \underline{Q}, t) - \sum_{i=1}^{s} p_i \, q_i + \sum_{i=1}^{s} P_i \, Q_i \ .$$

Durch Auflösen und Einsetzen erhält man in diesem Fall:

$$q_i = - \frac{\partial F_4}{\partial p_i} \quad , \quad Q_i = + \frac{\partial F_4}{\partial P_i} \quad , \quad K = H + \frac{\partial F_4}{\partial t} \ .$$

Bei mehr als einem Freiheitsgrad ($s > 1$) kann eine kanonische Transformation für jedes i einem anderen Typ angehören, sie ist dann von gemischtem Typ.

Die kanonische Transformation ($s = 2$) mit der Erzeugenden

$$F(q_1, P_1, q_2, Q_2) = q_1 P_1 + q_2 Q_2 \quad \to \quad \begin{cases} Q_1 = +q_1 & , \quad P_1 = +p_1 \\ Q_2 = +p_2 & , \quad P_2 = -q_2 \end{cases}$$

ist von gemischtem Typ. Für $i = 1$ handelt es sich um die Identität, für $i = 2$ um die Vertauschung von Koordinate und Impuls. Eine solche Transformation, bei der ein Teil der Koordinaten in Impulse umgewandelt wird, während die übrigen unverändert bleiben, heißt elementar. Jede kanonische Transformation läßt sich als Produkt einer elementaren Transformation und einer vom Typ 1 darstellen.

Die beliebige Umwandelbarkeit von Koordinaten in Impulse und umgekehrt hat zur Folge, daß diese Begriffe ihre absolute Bedeutung verlieren. Es liegt daher nahe, für die Variablen im Phasenraum eine einheitliche Bezeichnung zu wählen:

$$x_1 = q_1, \ldots, x_s = q_s, x_{s+1} = p_1, \ldots, x_{2s} = p_s \ .$$

Die Blattstruktur des $2s$-dimensionalen Raumes bleibt aber erhalten, denn die Variablen x_i und x_{i+s} sind zueinander konjugiert:

$$[x_i, x_j] = \pm\, \delta_{j,i\pm s} \ .$$

Die kanonischen Gleichungen nehmen mit dieser Bezeichnungsweise die Gestalt an:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ . \\ . \\ . \\ \dot{x}_s \\ \dot{x}_{s+1} \\ . \\ . \\ . \\ \dot{x}_{2s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & . & . & . & 0 & +1 & 0 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & +1 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & +1 & . \\ 0 & . & . & . & 0 & 0 & . & . & . & +1 \\ -1 & . & . & . & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ . & -1 & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & -1 & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & -1 & 0 & . & . & . & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial H/\partial x_1 \\ . \\ . \\ . \\ \partial H/\partial x_s \\ \partial H/\partial x_{s+1} \\ . \\ . \\ . \\ \partial H/\partial x_{2s} \end{pmatrix} \ .$$

Sie wird hier nicht weiter verwendet, Details finden sich bei Scheck, Mechanik.

Die Tatsache, daß die Gruppe der kanonischen Transformationen über die der Punkttransformationen hinausgeht, ermöglicht es, alle Koordinaten zyklisch zu machen.

Für den eindimensionalen harmonischen Oszillator gilt

$$H = \frac{1}{2m}\, p^2 + \frac{m\omega^2}{2}\, q^2 \ .$$

Mit der erzeugenden Funktion

$$F_1(q, Q) = \frac{m\omega}{2}\, q^2 \cot(\omega Q)$$

erhält man zunächst

$$p = m\omega\, q \cot(\omega Q) \quad , \quad P = \frac{m\omega^2}{2}\, \frac{q^2}{\sin^2(\omega Q)}$$

und durch Auflösen nach Q, P bzw. q, p als Transformationsgleichungen

$$Q = \frac{1}{\omega}\, \mathrm{arccot}\Big(\frac{p}{m\omega q}\Big) \quad , \quad P = \frac{1}{2m}\, (p^2 + m^2\omega^2 q^2)$$

$$q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega^2}}\, \sin(\omega Q) \quad , \quad p = \sqrt{2mP}\, \cos(\omega Q) \ .$$

Die transformierte Hamilton-Funktion ist

$$K(Q, P) = H = P \ ,$$

Q ist also eine zyklische Koordinate. Aus den kanonischen Gleichungen folgt

$$\dot{Q} = +\frac{\partial K}{\partial P} = 1 \quad \rightarrow \quad Q = t + \alpha$$
$$\dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial Q} = 0 \quad \rightarrow \quad P \equiv E\ .$$

Der transformierte Impuls ist hier das Bewegungsintegral Gesamtenergie. Setzt man noch $\delta = \alpha\,\omega$, so folgt durch Rücktransformation:

$$q(t) = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}\ \sin(\omega t + \delta)\ ,$$

in Übereinstimmung mit dem früheren Ergebnis.

Kanonische Invarianz

Dynamische Größen (Observablen), wie die Energie oder die z-Komponente des Drehimpulses, lassen sich in einem bestimmten System von dynamischen Variablen q_i, p_i darstellen als $f(q_i, p_i, t)$, haben aber eine absolute physikalische Bedeutung, müssen daher invariant gegenüber einem Wechsel des Variablensystems (kanonische Transformation) sein. Für beliebige Funktionen der dynamischen Variablen gilt das nicht, daher ist nicht von vornherein klar, daß die Poisson-Klammer aus zwei dynamischen Größen wieder eine dynamische Größe ist.

Im isotropen dreidimensionalen Raum der Geometrie hängen die Beziehungen zwischen geometrischen Objekten nicht von der Auswahl des Koordinatensystems, insbesondere von der Richtung der Koordinatenachsen, ab. Dem trägt man Rechnung durch die Vektorschreibweise für invariante eindimensionale Objekte. Aus ihnen lassen sich durch Produktbildung weitere der gleichen Art bilden, wobei die Definition häufig mit Hilfe der Komponenten in einem gegebenen Koordinatensystem erfolgt. Das Vektorprodukt zweier Vektoren läßt sich beispielsweise definieren durch

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] \equiv \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}\ .$$

Man kann zeigen, daß die rechte Seite dieser Gleichung forminvariant gegenüber Drehungen des Koordinatensystems ist, es handelt sich also um eine invariante Konstruktion. Würde man dagegen ein Produkt durch die folgende Vorschrift definieren:

$$\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\} = \begin{pmatrix} a_y b_z + a_z b_y \\ a_z b_x + a_x b_z \\ a_x b_y + a_y b_x \end{pmatrix}\ ,$$

so wäre diese Konstruktion nicht invariant.

Im folgenden soll die Invarianz der Poisson-Klammer bei kanonischen Transformationen bewiesen werden. Dazu wird zunächst das benutzte Variablensystem als Subskript angegeben:

$$[f, g]_{q,p}\ .$$

Als erstes wird die Invarianz der fundamentalen Poisson-Klammern bewiesen. Für eine kanonische Transformation mit der erzeugenden Funktion $F_1(\underline{q}, \underline{Q}, t)$ gilt:

$$p_i = +\frac{\partial F_1}{\partial q_i} \quad , \quad P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i}\ .$$

Durch eine weitere Ableitung nach Q_j folgt:

$$\frac{\partial p_i}{\partial Q_j} = \frac{\partial^2 F_1}{\partial Q_j \partial q_i} = \frac{\partial^2 F_1}{\partial q_i \partial Q_j} = -\frac{\partial P_j}{\partial q_i}\ ,$$

also als Zusammenhang zwischen p_i, Q_j und P_j, q_i:

$$F_1 : \quad \frac{\partial p_i}{\partial Q_j} = -\frac{\partial P_j}{\partial q_i} \ .$$

Analog ergibt sich für F_2, F_3, F_4:

$$F_2 : \quad \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} = +\frac{\partial P_j}{\partial p_i}$$

$$F_3 : \quad \frac{\partial q_i}{\partial P_j} = -\frac{\partial Q_j}{\partial p_i}$$

$$F_4 : \quad \frac{\partial p_i}{\partial P_j} = +\frac{\partial Q_j}{\partial q_i} \ .$$

Durch Einsetzen in die fundamentale Poisson-Klammer folgt

$$[Q_i, P_j]_{q,p} = \sum_{k=1}^{s} \Big(\frac{\partial Q_i}{\partial q_k} \frac{\partial P_j}{\partial p_k} - \frac{\partial Q_i}{\partial p_k} \frac{\partial P_j}{\partial q_k} \Big) = \sum_{k=1}^{s} \Big(\frac{\partial Q_i}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial Q_j} + \frac{\partial Q_i}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial Q_j} \Big) = \frac{\partial Q_i}{\partial Q_j} = \delta_{ij} \ .$$

Andererseits ist trivialerweise

$$[Q_i, P_j]_{Q,P} = \delta_{ij} \ ,$$

diese fundamentale Poisson-Klammer ist also invariant:

$$[Q_i, P_j]_{Q,P} = [Q_i, P_j]_{q,p} = \delta_{ij} \ .$$

Auf die gleiche Weise zeigt man die Invarianz der übrigen Klammern:

$$[Q_i, Q_j]_{Q,P} = [Q_i, Q_j]q,p = 0 \quad , \quad [P_i, P_j]_{Q,P} = [P_i, P_j]_{q,p} = 0 \ .$$

Damit ergibt sich als notwendiges Kriterium für die Kanonizität einer Transformation:

$$[Q_i, Q_j]_{q,p} = [P_i, P_j]_{q,p} = 0 \quad , \quad [Q_i, P_j]_{q,p} = \delta_{ij} \ .$$

Die Transformation, die beim harmonischen Oszillator ($s = 1$) die Koordinate zyklisch macht, hat die Gestalt

$$Q = \frac{1}{\omega} \operatorname{arccot}(\frac{p}{m\omega q}) \quad , \quad P = \frac{1}{2m} (p^2 + m^2\omega^2 q^2) \ .$$

Wegen der Antisymmetrie der Poisson-Klammer ist

$$[Q, Q]_{q,p} = 0 \quad , \quad [P, P]_{q,p} = 0 \ ,$$

durch Auswerten der verbleibenden Poisson-Klammer erhält man

$$[Q, P]_{q,p} = \frac{\partial Q}{\partial q} \frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial q} = \frac{p^2}{p^2 + m^2\omega^2 q^2} + \frac{m^2\omega^2 q^2}{p^2 + m^2\omega^2 q^2} = 1 \ ,$$

die Transformation ist also kanonisch.

Auf die gleiche Weise ergibt sich die Kanonizität der Transformation

$$Q_1 = +q_1 \quad , \quad P_1 = +p_1 \quad , \quad Q_2 = +p_2 \quad , \quad P_2 = -q_2 \ .$$

Für die allgemeine Poisson-Klammer folgt durch Ausschreiben, Umrechnung in den jeweils zweiten Faktoren und Umordnung:

$$\begin{aligned}
[f, g]_{Q,P} &= \sum_{k=1}^{s} \Big(\frac{\partial f}{\partial Q_k} \frac{\partial g}{\partial P_k} - \frac{\partial f}{\partial P_k} \frac{\partial g}{\partial Q_k} \Big) \\
&= \sum_{k=1}^{s} \sum_{j=1}^{s} \Big\{ \frac{\partial f}{\partial Q_k} \Big(\frac{\partial g}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial P_k} + \frac{\partial g}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial P_k} \Big) - \frac{\partial f}{\partial P_k} \Big(\frac{\partial g}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial Q_k} + \frac{\partial g}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial Q_k} \Big) \Big\} \\
&= \sum_{j=1}^{s} \Big\{ \frac{\partial g}{\partial q_j} [f, q_j]_{Q,P} + \frac{\partial g}{\partial p_j} [f, p_j]_{Q,P} \Big\} \ .
\end{aligned}$$

Für den speziellen Fall $g = q_j$ wird daraus:

$$
\begin{aligned}
[f, q_j]_{Q,P} &= -[q_j, f] = -\sum_{k=1}^{s} \left\{ \frac{\partial f}{\partial q_k} [q_j, q_k]_{Q,P} + \frac{\partial f}{\partial p_k} [q_j, p_k]_{Q,P} \right\} \\
&= -\sum_{k=1}^{s} \left\{ \frac{\partial f}{\partial q_k} \cdot 0 + \frac{\partial f}{\partial p_k} \delta_{jk} \right\} = -\frac{\partial f}{\partial p_j}
\end{aligned}
$$

und ebenso für $g = p_j$:

$$[f, p_j]_{Q,P} = +\frac{\partial f}{\partial q_j} \ .$$

Durch Einsetzen in die Formel für die allgemeine Poisson-Klammer wird diese:

$$[f, g]_{Q,P} = \sum_{j=1}^{s} \left\{ -\frac{\partial g}{\partial q_j} \frac{\partial f}{\partial p_j} + \frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial g}{\partial p_j} \right\} = [f, g]_{q,p} \ .$$

Damit ist ihre kanonische Invarianz bewiesen.

Für einen Massenpunkt in einem Potentialfeld $V(z)$ sind die dynamischen Größen p_x und L_z Bewegungsintegrale. Ihre Poisson-Klammer im Variablensystem x, y, z, p_x, p_y, p_z ist

$$[p_x, L_z] = [p_x, x p_y - y p_x] = -p_y \ .$$

Die (kanonische) Punkttransformation auf Zylinderkoordinaten ρ, φ, z wird erzeugt durch

$$F_3(p_x, p_y, p_z, \rho, \varphi, z) = \rho \cos\varphi \, p_x + \rho \sin\varphi \, p_y + z \, p_z \ .$$

Die Transformationsgleichungen sind

$$
\begin{array}{ccccc}
x = \rho\cos\varphi & , & y = \rho\sin\varphi & , & z = z \\
p_x = p_\rho \cos\varphi - \dfrac{p_\varphi}{\rho}\sin\varphi & , & p_y = p_\rho \sin\varphi + \dfrac{p_\varphi}{\rho}\cos\varphi & , & p_z = p_z \ .
\end{array}
$$

Im neuen Variablensystem $\rho, \varphi, z, p_\rho, p_\varphi, p_z$ ist die Poisson-Klammer (mit $p_\varphi = L_z$):

$$[p_\rho \cos\varphi - \frac{p_\varphi}{\rho}\sin\varphi, \, p_\varphi] = -p_\rho \sin\varphi - \frac{p_\varphi}{\rho}\cos\varphi = -p_y \ ,$$

also invariant gegenüber der Koordinatentransformation.

Das Kriterium der Gültigkeit der fundamentalen Poisson-Klammern ist für die Kanonizität einer Transformation nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend, wie hier für den Fall gezeigt werden soll, daß diese nicht explizit von der Zeit abhängt. Es gilt dann nämlich:

$$
\begin{aligned}
\dot{q}_i &= [q_i, H]_{Q,P} = [q_i, H]_{q,p} = +\frac{\partial H}{\partial p_i} \\
\dot{p}_i &= [p_i, H]_{Q,P} = [p_i, H]_{q,p} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \ .
\end{aligned}
$$

Wenn bei einer Transformation die Poisson-Klammern invariant sind, bleibt also auch die Form der kanonischen Gleichungen erhalten.

Im allgemeinen Fall geht man zum Beweis vom Liouville-Theorem aus, das hier nicht behandelt wird, siehe dazu die Bücher von Scheck und Goldstein. In der symplektischen Geometrie des Phasenraumes wird durch die Poisson-Klammer die Metrik festgelegt. Die kanonischen Transformationen sind dann dadurch charakterisiert, daß sie die Metrik im Phasenraum invariant lassen und spielen damit die gleiche Rolle wie die Drehungen in der dreidimensionalen Geometrie oder die unitären Transformationen im quantenmechanischen Zustandsraum.

Poisson-Klammern und Drehimpulse

Wenn es gelingt, für ein System einen Satz von s Bewegungsintegralen anzugeben, die miteinander in Involution stehen, so ist damit seine Integrabilität gesichert. Es ist dann nämlich möglich, eine kanonische Transformation zu finden, bei der diese Größen die Rolle von generalisierten Impulsen P_i spielen, die konjugierten Koordinaten Q_i also zyklisch sind.

Ein eindimensionaler harmonischer Oszillator wird beschrieben durch die Hamilton-Funktion

$$H = \frac{1}{2m}\,p^2 + \frac{m\omega^2}{2}\,q^2 \ .$$

Da diese nicht explizit von der Zeit anhängt, ist sie ein Bewegungsintegral. Durch eine zeitunabhängige kanonische Transformation läßt sich erreichen, daß

$$P(q,p) = H(q,p) = \frac{1}{2m}\,p^2 + \frac{m\omega^2}{2}\,q^2 \ .$$

Die neue Hamilton-Funktion ist dann

$$K = H = P \ .$$

P ist damit als Funktion von q und p gegeben, für Q gilt:

$$[Q,P] = 1 \ ,$$

oder in ausgeschriebener Form:

$$\frac{\partial Q}{\partial q}\frac{p}{m} - \frac{\partial Q}{\partial p}\,m\omega^2 q = 1 \ .$$

Mit den Abkürzungen $x = m\omega q\,,\ y = p\,,\ f = \omega Q$ wird daraus die lineare inhomogene partielle Differentialgleichung 1. Ordnung

$$y\,\frac{\partial f}{\partial x} - x\,\frac{\partial f}{\partial y} = 1 \ .$$

Zu ihrer Integration gibt es kein einfaches Verfahren. Führt man aber durch $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$ Polarkoordinaten ein, so gilt für $f(x,y) = g(r,\varphi)$:

$$\frac{\partial g}{\partial \varphi} = -1 \quad \to \quad g(r,\varphi) = -\,\varphi + \psi(r) \ ,$$

wobei $\psi(r)$ eine beliebige Funktion von r ist. Mit $\psi(r) \equiv \pi/2$ wird dann

$$f(x,y) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \operatorname{arccot}\left(\frac{y}{x}\right)$$

und durch Rücktransformation zu den ursprünglichen Variablen

$$Q(q,p) = \frac{1}{\omega}\operatorname{arccot}\left(\frac{p}{m\omega q}\right) \ .$$

Für einen Massenpunkt stehen die Komponenten des Linearimpulses als die zu den Koordinaten x, y, z konjugierten Variablen trivialerweise in Involution miteinander:

$$[p_i, p_j] = 0 \ .$$

Wenn einzelne von ihnen Bewegungsintegrale sind, bedeutet das, daß die Hamilton-Funktion des Systems invariant gegenüber Verschiebungen in der zugehörigen q-Richtung ist. In entsprechender Weise folgt aus der Invarianz von H gegenüber einer Drehung um eine Achse, daß die zugehörige Komponente des Drehimpulses erhalten bleibt. Im Gegensatz zum Linearimpuls stehen die Komponenten des Drehimpulses aber nicht in Involution miteinander:

$$[L_i, L_j] = \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} L_k \ .$$

Hier ist ε_{ijk} das Levi-Civita-Symbol:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & : \quad (ijk) \text{ gerade Permutation von } (123) \\ -1 & : \quad (ijk) \text{ ungerade Permutation von } (123) \\ 0 & : \quad \text{zwei oder drei Indizes gleich} \end{cases}$$

Für das Betragsquadrat des Drehimpulses ergibt sich daraus:

$$\begin{aligned} [L_i, L^2] &= [L_i, \sum_{j=1}^{3} L_j^2] = \sum_{j=1}^{3} [L_i, L_j^2] \\ &= 2 \sum_{j=1}^{3} L_j \, [L_i, L_j] = 2 \sum_{j=1}^{3} \varepsilon_{ijk} \, L_j L_k = 0 \ . \end{aligned}$$

Da die Komponenten des Drehimpulses nicht in Involution miteinander stehen, können sie in keinem Variablensystem die Rolle der generalisierten Impulse spielen, und es kann kein zu ihnen konjugiertes Tripel von Winkelkoordinaten geben. Die tiefere Ursache dafür liegt darin, daß die Drehgruppe im Gegensatz zur Verschiebungsgruppe nicht kommutativ ist.

4. Infinitesimale kanonische Transformationen

Eine Transformation, die die neuen Variablen Q_i, P_i als Funktionen der alten Variablen q_i, p_i darstellt, kann immer auf zwei Weisen interpretiert werden. Man nimmt entweder an, daß der Zustand des Systems (Punkt im Phasenraum) unverändert bleibt, aber ein neues Koordinatensystem verwendet wird (passiver Standpunkt), oder daß im unveränderten Koordinatensystem der repräsentative Punkt eine neue Lage einnimmt (aktiver Standpunkt). Im Gegensatz zum bisherigen Gebrauch wird hier im folgenden in der Regel der aktive Standpunkt eingenommen werden.

Endliche kanonische Transformationen sind im allgemeinen relativ kompliziert und nichtlinear, infinitesimale Transformationen dagegen immer linear:

$$Q_i = q_i + \delta q_i \quad , \quad P_i = p_i + \delta p_i \ .$$

Da sie von der identischen Transformation also nur um Glieder erster Ordnung abweichen, läßt sich die zugehörige erzeugende Funktion stets schreiben als

$$F_2(\underline{q}, \underline{P}) = \sum_{i=1}^{s} q_i \, P_i + \epsilon \, G(\underline{q}, \underline{P})$$

mit einem infinitesimalen Parameter ϵ. Daraus folgen die Transformationsgleichungen

$$\begin{aligned} p_i &= + \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = P_i + \epsilon \, \frac{\partial G}{\partial q_i} \\ Q_i &= + \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = q_i + \epsilon \, \frac{\partial G}{\partial P_i} \ . \end{aligned}$$

Durch Vergleich mit den Definitionsgleichungen ergibt sich:

$$\delta p_i = P_i - p_i = -\epsilon \, \frac{\partial G}{\partial q_i} \quad , \quad \delta q_i = Q_i - q_i = -\epsilon \, \frac{\partial G}{\partial P_i} \ .$$

Es gilt aber bis auf Terme 2. Ordnung in ϵ:

$$\epsilon\,\frac{\partial G}{\partial P_i} \approx \epsilon\,\frac{\partial G}{\partial p_i}$$

und entsprechend für die Ableitungen nach den Koordinaten. Man nennt $G(q_i,p_i)$ die erzeugende Funktion der infinitesimalen kanonische Transformation. Damit ergibt sich:

$$\delta q_i = +\,\epsilon\,\frac{\partial G}{\partial p_i} \quad , \quad \delta p_i = -\,\epsilon\,\frac{\partial G}{\partial q_i}\ .$$

Je nach Wahl der erzeugenden Funktion $G(q_i,p_i)$ und des Parameters ϵ erhält man verschiedene Transformationen, die hier im aktiven Sinne gedeutet werden:

$$q_i \to q_i + \delta q_i \quad , \quad p_i \to p_i + \delta p_i\ .$$

Speziell für $G(q_i,p_i) = H(q_i,p_i)$ und $\epsilon = dt$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\delta q_i &= +\,dt\,\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot q_i\,dt = dq_i \\
\delta p_i &= -\,dt\,\frac{\partial H}{\partial q_i} = \dot p_i\,dt = dp_i\ .
\end{aligned}$$

Die Transformation bringt das System also zu demselben Punkt, den es auch bei seiner Bewegung im Phasenraum zum Zeitpunkt $t+dt$ einnehmen würde. Die Hamilton-Funktion H erzeugt also (aktiv) die zeitliche Veränderung der Variablen q_i, p_i im Zeitintervall dt.

Die infinitesimalen kanonischen Transformationen bilden, wie die endlichen, eine Gruppe, so daß zwei nacheinander ausgeführte einer einzigen, ihrem Produkt, äquivalent sind. Die Bewegung des Systems in einem endlichen Zeitintervall von t_0 bis t kann daher durch eine Folge infinitesimaler kanonischer Transformationen mit der Hamilton-Funktion als Erzeugender dargestellt werden, deren Ergebnis eine kanonische Transformation ist, die kontinuierlich von der Zeit abhängt. Sie überführt die Werte der Variablen q_i und p_i zum Zeitpunkt t_0 in die zur Zeit t. Ihre Kehrtransformation bildet umgekehrt die $q_i(t), p_i(t)$ auf die konstanten Anfangswerte ab:

$$Q_i(\underline{q}(t),\underline{p}(t)) \equiv q_i(t_0) \quad , \quad P_i(\underline{q}(t),\underline{p}(t)) \equiv p_i(t_0)\ .$$

Im transformierten System sind also nicht nur alle Impulse, sondern auch alle Koordinaten Bewegungsintegrale. Die Gewinnung einer solchen Transformation ist daher der Integration der Bewegungsgleichungen äquivalent.

Bei infinitesimalen kanonischen Transformationen ändern sich mit den dynamischen Variablen q_i und p_i auch die dynamischen Größen $u = f(q_i,p_i)$:

$$\begin{aligned}
\delta u &= f(q_i+\delta q_i, p_i+\delta p_i) - f(q_i,p_i) \\
&= \sum_{i=1}^{s}\Big(\frac{\partial f}{\partial q_i}\,\delta q_i + \frac{\partial f}{\partial p_i}\,\delta p_i\Big) = \epsilon\sum_{i=1}^{s}\Big(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial q_i}\Big) \\
&= \epsilon\,[\,u, G]\ .
\end{aligned}$$

Im oben betrachteten Sonderfall $G = H$, $\epsilon = dt$ ergibt sich:

$$\frac{du}{dt} = [\,u, H]\ ,$$

in Übereinstimmung mit dem früheren Ergebnis. Umgekehrt folgt für $f = H$:

$$\delta H = \epsilon\,[H, G]$$

als Änderung von H bei der infinitesimalen kanonischen Transformation mit der Erzeugenden G. Ist insbesondere G ein Bewegungsintegral, so gilt:

$$[H, G] = 0 \quad \rightarrow \quad \delta H = 0 \; .$$

Eine solche Transformation läßt also H ungeändert und gehört damit zur Symmetriegruppe der Hamilton-Funktion. Jeder Transformation ist auf diese Weise eine dynamische Größe zugeordnet und umgekehrt. Die Bewegungsintegrale sind die Erzeugenden (Generatoren) derjenigen infinitesimalen Transformationen, die die Hamilton-Funktion des Systems invariant lassen.

Für ein System von N Massenpunkten führt eine Drehung um die z-Achse um den infinitesimalen Winkel $\delta\varphi$ zu den neuen Koordinaten

$$X_i = x_i - y_i\,\delta\varphi \quad , \quad Y_i = y_i + x_i\,\delta\varphi \quad , \quad Z_i = z_i$$

und damit zu den Koordinatenänderungen

$$\delta x_i = -\,y_i\,\delta\varphi \quad , \quad \delta y_i = +\,x_i\,\delta\varphi \quad , \quad \delta z_i = 0 \; .$$

Linearimpulse transformieren sich in der gleichen Weise wie Ortsvektoren:

$$\delta p_{xi} = -\,p_{yi}\,\delta\varphi \quad , \quad \delta p_{yi} = +\,p_{xi}\,\delta\varphi \quad , \quad \delta p_{z0} = 0 \; .$$

Andererseits gilt für eine infinitesimale kanonische Transformation mit der Erzeugenden $G(x_i, y_i, z_i, p_{xi}, p_{yi}, p_{zi})$ und dem Parameter $\delta\varphi$:

$$\begin{aligned}
\delta x_i &= +\frac{\partial G}{\partial p_{xi}}\,\delta\varphi \quad , & \delta y_i &= +\frac{\partial G}{\partial p_{yi}}\,\delta\varphi \quad , & \delta z_i &= +\frac{\partial G}{\partial p_{zi}}\,\delta\varphi \\
\delta p_{xi} &= -\frac{\partial G}{\partial x_i}\,\delta\varphi \quad , & \delta p_{yi} &= +\frac{\partial G}{\partial y_i}\,\delta\varphi \quad , & \delta p_{zi} &= -\frac{\partial G}{\partial z_i}\,\delta\varphi \quad .
\end{aligned}$$

Durch Vergleich ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G}{\partial x_i} &= +\,p_{yi} \quad , & \frac{\partial G}{\partial y_i} &= -\,p_{xi} \quad , & \frac{\partial G}{\partial z_i} &= 0 \\
\frac{\partial G}{\partial p_{xi}} &= -\,y_i \quad , & \frac{\partial G}{\partial p_{yi}} &= +\,x_i \quad , & \frac{\partial G}{\partial p_{zi}} &= 0 \; .
\end{aligned}$$

Das ist ein System von partiellen Differentialgleichungen für G mit der Lösung

$$G = \sum_{i=1}^{N} (x_i\,p_{yi} - y_i\,p_{xi}) = L_z \; .$$

Eine differentielle Drehung des Systems um die z-Achse wird also erzeugt durch die z-Komponente des Gesamtdrehimpulses. Falls dabei die Hamilton-Funktion invariant bleibt, ist L_z ein Bewegungsintegral.

Die umgekehrte Aufgabe, aus der Form eines Bewegungsintegrals die zugehörige endliche kanonische Transformation herzuleiten, ist im allgemeinen wesentlich schwerer zu lösen.

Für das Keplerproblem ist der Laplace-Runge-Lenz-Vektor eine Erhaltungsgröße, die zugehörige kanonische Transformation ist eine vierdimensionale Rotation im Phasenraum.

Besonders einsichtig ist dieser Zusammenhang für zyklische Koordinaten. Die Generatoren der Symmetrietransformationen bezüglich dieser q_i sind die konjugierten Impulse p_i, bei Verschiebungen also Linearimpulse, bei Drehungen Drehimpulse. Ein Koordinatensystem, in dem eine zyklische Variable auftritt, ist häufig, aber nicht immer, das für die Aufstellung der Hamilton-Funktion am besten geeignete.

Ein Massenpunkt soll sich in einem Potentialfeld der Form

$$V(\boldsymbol{r}) = \beta z + \frac{k}{2} r^2$$

bewegen, das erkennbar eine Drehsymmetrie um die z-Achse aufweist. Wählt man deshalb zur Darstellung Zylinderkoordinaten ρ, φ, z, so erhält die Lagrange-Funktion die Gestalt

$$L = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - \beta z - \frac{k}{2}(\rho^2 + z^2) \ .$$

Hier ist die Variable φ wie erwartet zyklisch, mit $\omega^2 = k/m$ lauten die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} m\,\ddot{\rho} - m\,\rho\,\dot{\varphi}^2 + \omega^2\rho &= 0 \\ m\,\rho^2\dot{\varphi} &= L_z \\ m\,\ddot{z} + m\omega^2 z + \beta &= 0 \ . \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung ist von den ersten beiden völlig unabhängig und beschreibt eine harmonische Schwingung in z-Richtung um den Punkt $-\beta/k$. Aus der zweiten Gleichung kann man $\dot{\varphi}$ eliminieren und in die erste einsetzen:

$$\ddot{\rho} - \frac{L_z^2}{m^2\rho^3} + \omega^2\rho = 0 \ .$$

Diese Gleichung läßt sich in der üblichen Weise integrieren, einfacher kommt man zum gleichen Ergebnis, wenn man beachtet, daß wegen der Zeitunabhängigkeit von L die Energie ein Bewegungsintegral ist:

$$\dot{\rho}^2 + \omega^2\rho^2 + \frac{L_z^2}{m^2\rho^2} = \frac{2E_0}{m} \ .$$

Mit der Substitution $u = \rho^2$ wird daraus:

$$\dot{u}^2 + 4\,\omega^2 u^2 + 4\,\frac{L_z^2}{m} - 8\,\frac{E_0}{m} = 0 \ .$$

Diese Differentialgleichung läßt sich durch Trennung der Variablen lösen, und man erhält mit der passenden Anfangsbedingung:

$$u(t) = \rho^2(t) = \frac{E_0}{m\omega^2} + \left[\frac{E_0^2}{m^2\omega^4} - \frac{L_z^2}{m^2\omega^2}\right]^{1/2} \cos(2\omega t) \ .$$

Es handelt sich um die radiale Bewegung eines zweidimensionalen isotropen harmonischen Oszillators. Wegen $k = m\omega^2$ stimmt das Ergebnis überein mit dem des entsprechenden Zweikörperproblems. Wie dort folgt für die φ-Bewegung:

$$\varphi(t) - \varphi_0 = \frac{L_z}{m}\int_0^t \frac{1}{u(t)}\,dt = \arctan\left[\frac{L_z}{m\omega}\,\tan(\omega t)\Big(\frac{E}{m\omega^2} + \sqrt{\frac{E}{m\omega^2} - \frac{L_z^2}{m^2\omega^2}}\Big)^{-1}\right] ,$$

also ein verhältnismäßig komplizierter Ausdruck.

In kartesischen Koordinaten x, y, z lautet die Lagrange-Funktion andererseits

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \beta z - \frac{k}{2}(x^2 + y^2 + z^2) \ .$$

Hier ist zwar keine Koordinate zyklisch, aber die Zerlegung

$$L = (\frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{k}{2}x^2) + (\frac{m}{2}\dot{y}^2 - \frac{k}{2}y^2) + (\frac{m}{2}\dot{z}^2 - \frac{k}{2}z^2 - \beta z)$$

zeigt, daß das System jetzt in drei völlig unabhängige Teilsysteme zerfällt, deren Teilenergien separat erhalten bleiben. Das letzte wurde schon oben betrachtet, die beiden anderen führen harmonische Schwingungen in der x- und y-Richtung aus.

Ebenso einfach ist die Benutzung der Newtonschen Bewegungsgleichung:

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = -\beta\,\boldsymbol{e}_z - k\boldsymbol{r} \ .$$

Es handelt sich um eine lineare inhomogene Differentialgleichung 1. Ordnung für $\boldsymbol{r}(t)$ mit der Lösung:

$$\boldsymbol{r}(t) = (\boldsymbol{r}_0 + \frac{\beta}{\omega^2}\,\boldsymbol{e}_z)\cos(\omega t) + \frac{1}{\omega}\,\boldsymbol{v}_0\sin(\omega t) \ ,$$

die die Bewegung in einer Ellipse um den Mittelpunkt $(0,0,-\beta/k)$ darstellt.

In Kugelkoordinaten dagegen werden trotz des Auftretens der zyklischen Koordinate φ die Bewegungsgleichungen so unübersichtlich, daß der relativ einfache Charakter der Bewegung nicht zu erkennen ist.

Auch für relativ einfache Potentiale kann die Auswahl des Koordinatensystems und die Lösung der Bewegungsgleichungen so schwierig werden, daß die bisher behandelten Lösungsverfahren versagen.

Für das gegenüber dem vorhergehenden Beispiel nur geringfügig veränderte System mit der potentiellen Energie

$$V(\boldsymbol{r}) = \beta\, z - \frac{\alpha}{r}$$

lassen sich die Bewegungsgleichungen ersichtlich weder in kartesischen noch in Zylinderkoordinaten separieren. In Kugelkoordinaten lautet die Lagrange-Funktion:

$$L = \frac{m}{2}\,(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + r^2\sin^2\vartheta\,\dot{\varphi}^2) - \beta\, r\cos\vartheta + \frac{\alpha}{r}\ .$$

Sie enthält weder die Zeit t noch die Koordinate φ explizit, Energie und z-Komponente des Drehimpulses sind also Erhaltungsgrößen. Man kann sogar zeigen, daß ein weiteres Bewegungsintegral

$$\tilde{A}_z = p_\vartheta^2 + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\,p_\varphi^2 + m\alpha\cos\vartheta - \frac{m\beta}{2}\,r^2\sin^2\vartheta$$

in Involution mit p_φ existiert, das Problem also integrabel sein muß, trotzdem lassen sich die Bewegungsgleichungen in Kugelkoordinaten nicht separieren.

Bei nicht-integrablen Systemen, die die Mehrzahl aller Fälle bilden, besteht natürlich grundsätzlich immer die Möglichkeit der numerischen Integration des Systems der Bewegungsgleichungen als eines gekoppelten Systems von gewöhnlichen Differentialgleichungen. Dieses Verfahren wird zum Beispiel in der Himmelsmechanik bei der Berechnung der Bahnen von Raumfahrzeugen angewendet und liefert diese mit sehr hoher Genauigkeit. Es lassen sich aber auf diese Weise immer nur Einzelfälle behandeln und keine allgemeinen Ergebnisse gewinnen. Für die Berechnung der Planetenbahnen wird daher seit langem - teilweise auch dadurch bedingt, daß früher keine hinreichend leistungsfähigen Rechenanlagen zur Verfügung standen - ein anderes Verfahren verwendet, nämlich die Entwicklung in Potenz- und Fourier-Reihen.

Aus Differentialgleichungen lassen sich unmittelbar Potenzreihen für ihre Lösungsfunktionen ("Integrale") gewinnen. So folgt aus der (normierten) Bewegungsgleichung des harmonischen Oszillators

$$y'' + y = 0 \qquad y(0) = 1\ ,\ y'(0) = 0$$

durch Einsetzen des Potenzreihenansatzes

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\, x^n$$

auf der linken Seite der Differentialgleichung:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\, c_n\, x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} c_m\, x^m = \sum_{n=0}^{\infty} [\, m(m+1)\, c_{m+2} + c_m]\, x^m = 0\ .$$

Hier müssen die Koeffizienten für jede Potenz von x einzeln verschwinden, und es ergibt sich für die Reihenkoeffizienten c_m eine Rekursionsformel 2. Ordnung:

$$c_{m+2} = -\,\frac{1}{m(m+1)}\, c_m\ .$$

Mit $c_0 = y(0) = 1$ und $c_1 = y'(0) = 0$ erhält man daraus, zum Beispiel durch vollständige Induktion:

$$c_{2m} = (-1)^m \, \frac{1}{(2m)!} \quad , \quad c_{2m+1} = 0$$

und damit die Reihe für $\cos(x)$. Aus ihr lassen sich, wenn auch mit einiger Mühe, allgemeine Folgerungen ziehen, wie etwa die Periodizität mit 2π.

Die Verbindung zwischen der zeitlichen Änderung dynamischer Größen und ihrer Poisson-Klammer mit der Hamilton-Funktion des Systems:

$$\frac{df}{dt} = [f, H] \ ,$$

wobei angenommen wurde, daß weder f noch H explizit von der Zeit abhängen, führt zu der Potenzreihenentwicklung

$$f(\underline{q}(t), \underline{p}(t)) = f_0 + \frac{t^1}{1!}\,[f_0, H_0] + \frac{t^2}{2!}\,[[f_0, H_0], H_0] + \dots \ .$$

Dabei ist $f_0 = f(\underline{q}(0), \underline{p}(0))$, $H_0 = H(\underline{q}(0), \underline{p}(0))$. Der Wert solcher Potenzreihen für die praktische Rechnung ist aber oft sehr beschränkt, da ihre Koeffizienten meist von sehr komplizierter Bauart sind und sich kaum Aussagen über ihre Konvergenz machen lassen.

Für den harmonischen Oszillator mit der Hamilton-Funktion

$$H(q_0, p_0) = \frac{1}{2m}\,p_0^2 + \frac{m\omega^2}{2}\,q_0^2$$

sind die Poisson-Klammern mit $H(q_0, p_0)$ für $f(q_0, p_0) = q_0$ und $f(q_0, p_0) = p_0$:

$$[q_0, H_0] = \frac{1}{m}\,p_0 \quad , \quad [p_0, H_0] = -\,m\omega^2\,q_0 \ .$$

Daraus ergibt sich mit der allgemeinen Beziehung von oben:

$$\begin{aligned}
q(t) &= q_0 + \frac{t^1}{1!}\,\frac{p_0}{m} - \frac{t^2}{2!}\,\omega^2 q_0 - \frac{t^3}{3!}\,\frac{p_0}{m} + \frac{t^4}{4!}\,\omega^4 q_0 + \dots \\
&= q_0\,\Big[1 - \frac{(\omega t)^2}{2!} + \frac{(\omega t)^4}{4!} - \dots\Big] + \frac{p_0}{m\omega}\,\Big[\frac{(\omega t)^1}{1!} - \frac{(\omega t)^3}{3!} + \dots\Big] \\
&= q_0\,\cos(\omega t) + \frac{p_0}{m\omega}\,\sin(\omega t) \\
p(t) &= p_0 - \frac{t^1}{1!}\,m\omega^2 q_0 - \frac{t^2}{2!}\,\omega^2 p_0 + \frac{t^3}{3!}\,m\omega^4 q_0 + \frac{t^4}{4!}\,\omega^4 p_0 - \dots \\
&= p_0\,\Big[1 - \frac{(\omega t)^2}{2!} + \frac{(\omega t)^4}{4!} - \dots\Big] - m\omega q_0\,\Big[\frac{(\omega t)^1}{1!} - \frac{(\omega t)^3}{3!} + \dots\Big] \\
&= p_0\,\cos(\omega t) - m\omega q_0\,\sin(\omega t)
\end{aligned}$$

in Übereinstimmung mit den früheren Resultaten.

D. HAMILTON-JACOBI-GLEICHUNG

Das Problem der Bewegung eines mechanischen Systems ist gelöst, wenn es gelingt, durch eine kanonische Transformation auf ein System von Variablen überzugehen, in dem alle Koordinaten Q_i zyklisch sind. Gleichzeitig sind damit s Bewegungsintegrale gegeben, die in Involution zueinander stehen, nämlich die zugehörigen (kanonisch-konjugierten) Impulse P_i. Die neue Hamilton-Funktion hat dann die Gestalt

$$K = K(P_1, \dots, P_s, t) \ ,$$

und die kanonischen Bewegungsgleichungen lauten

$$\dot{Q}_i = +\frac{\partial K}{\partial P_i} = f_i(P_1, \dots, P_s, t) \quad , \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i} = 0 \ .$$

Für die Impulse ergibt sich

$$P_i \equiv \beta_i \quad \to \quad \dot{Q}_i = f_i(\beta_1, \dots, \beta_s, t) \ ,$$

damit ist die Berechnung der Q_i auf Quadraturen zurückgeführt:

$$Q_i = \int_0^t f_i(\beta_1, \dots, \beta_s, t)\, dt + \alpha_i = F_i(\beta_1, \dots, \beta_s, t) + \alpha_i \ .$$

Durch die darauf folgende Punkttransformation mit der Erzeugenden

$$F_2(Q_i, \bar{P}_i, t) = \sum_{i=1}^{s} [\, Q_i - F_i(\beta_1, \dots, \beta_s, t)]\, \bar{P}_i$$

werden dann auch alle Koordinaten zeitlich konstant und somit alle Variablen sowohl zyklisch als auch konstant:

$$\bar{Q}_i = Q_i - F_i(\beta_1, \dots, \beta_s, t) \equiv \alpha_i \quad , \quad \bar{P}_i = P_i \equiv \beta_i$$

Die neue Hamiltonfunktion $\bar{K}$ kann dann nur noch von der Zeit abhängen:

$$\bar{K} = \phi(t) \ ,$$

ein solcher Term fällt aber beim Aufstellen der Bewegungsgleichungen fort und kann deshalb weggelassen werden.

Die Aufgabe besteht also letztlich darin, eine kanonische Transformation zu finden, die auf ein Variablensystem führt, in dem die transformierte Hamiltonfunktion identisch verschwindet. Wenn $S(q_i, Q_i, t)$ ihre Erzeugende vom Typ 1 ist, soll also gelten:

$$K = H + \frac{\partial S}{\partial t} \equiv 0 \ .$$

Für die Impulse p_i folgt dann aus den Transformationsformeln für F_1:

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} \ .$$

Setzt man das in die Hamilton-Funktion $H(q_i, p_i, t)$ ein, so ergibt sich:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\Big(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}, t\Big) = 0 \ ,$$

die Hamilton-Jacobi-Gleichung, die eine notwendige Bedingung für die gesuchte erzeugende Funktion S darstellt. Es handelt sich dabei um eine partielle Differentialgleichung 1. Ordnung mit den $s+1$ Variablen $q_1, \ldots, q_s, t$. S wird dadurch allerdings nur bis auf eine beliebige additive Integrationskonstante S_0 festgelegt, die aber für die Bewegung des Systems ohne Bedeutung ist, da sie in den Transformationsgleichungen fortfällt.

1. Die Wirkungsfunktion

Für eine Phasenbahn des Systems $(q_i(t), p_i(t))$, die zur Zeit $t = 0$ im Punkt (q_{i0}, p_{i0}) beginnt und zur Zeit t im Punkt (q_i, p_i) endet, ist das im Hamilton-Prinzip auftretende Wirkungsintegral S definiert durch

$$S = \int_0^t L(q_i(t), \dot{q}_i(t), t)\, dt \ .$$

Es hängt außer von der Zeit t auch von den Anfangsbedingungen ab:

$$S = S(q_{i0}, p_{i0}, t) \ .$$

Bei gleichen q_{i0} hängen die $q_i(t)$ von den p_{i0} ab, auf einer (aktualen) Vergleichsbahn mit den Anfangsimpulsen $\bar{p}_{i0}$ werden die Endwerte $\bar{q}_i(t)$ erreicht. Die Gleichungen

$$q_j = q_j(q_{i0}, p_{i0}, t)$$

lassen sich daher im Prinzip nach den p_{i0} auflösen:

$$p_{i0} = p_{i0}(q_{j0}, q_j, t) \ .$$

Durch Einsetzen in das Wirkungsintegral wird dieses ebenfalls eine Funktion der Koordinaten q_i, die Wirkungsfunktion $\tilde{S}(q_i, q_{i0}, t)$.

Für den harmonischen Oszillator mit der Lagrange-Funktion

$$L = \frac{m}{2}\,\dot{q}^2 - \frac{m\omega^2}{2}\,q^2$$

gilt für die Bahn mit den Anfangswerten $q(0) = q_0$, $p(0) = p_0$:

$$q(t) = q_0 \cos(\omega t) + \frac{p_0}{m\omega}\sin(\omega t) \quad \rightarrow \quad \dot{q}(t) = -\,\omega\, q_0 \sin(\omega t) + \frac{p_0}{m}\cos(\omega t) \ .$$

Durch Einsetzen in das Wirkungsintegral ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\tilde{S} &= \frac{m}{2}\int_0^t \{[-\,\omega q_0 \sin(\omega t) + \frac{p_0}{m}\cos(\omega t)]^2 - \omega^2[q_0\cos(\omega t) + \frac{p_0}{m\omega}\sin(\omega t)]^2\}\, dt \\
&= \frac{m\omega^2}{2}\int_0^t \left\{\left[\frac{p_0^2}{m^2\omega^2} - q_0^2\right]\cos(2\omega t) - \frac{2q_0p_0}{m\omega}\sin(2\omega t)\right\} dt \\
&= \frac{m\omega}{2}\left\{\left[\frac{p_0^2}{m^2\omega^2} - q_0^2\right]\sin(\omega t)\cos(\omega t) - \frac{2q_0p_0}{m\omega}\sin^2(\omega t)\right\} \ .
\end{aligned}$$

Aus der Bahngleichung folgt durch Auflösen nach p_0

$$p_0 = m\omega\,\frac{q - q_0\cos(\omega t)}{\sin(\omega t)}$$

und durch Einsetzen in $\tilde{S}$

$$\tilde{S}(q, q_0, t) = \frac{m\omega}{2}\,\frac{(q^2 + q_0^2)\cos(\omega t) - 2q\, q_0}{\sin(\omega t)} \ .$$

Für zwei benachbarte Phasenbahnen ist der Unterschied der Wirkungsintegrale

$$\delta\tilde{S} = \int\limits_0^t \delta L(q_i, \dot{q}_i, t)\, dt = \int\limits_0^t \sum_{i=1}^{s} \Big(\frac{\partial L}{\partial q_i}\, \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\, \delta \dot{q}_i \Big) dt \ .$$

Durch partielle Integration des zweiten Terms ergibt sich

$$\delta\tilde{S} = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\, \delta q_i \Big|_0^t + \sum_{i=1}^{s} \int\limits_0^t \Big[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \Big) \Big] \delta q_i \, dt \ .$$

Da für aktuale Bahnen die Lagrange-Gleichungen gelten, verschwindet das Integral, und es folgt

$$\delta\tilde{S} = \sum_{i=1}^{s} (p_i\, \delta q_i - p_{i0}\, \delta q_{i0}) \ .$$

Daraus ergibt sich

$$\frac{\partial \tilde{S}}{\partial q_i} = +\, p_i \quad , \quad \frac{\partial \tilde{S}}{\partial q_{i0}} = -\, p_{i0} \ .$$

Die zeitliche Änderung von $\tilde{S}$ längs einer Bahn ist andererseits

$$\frac{d\tilde{S}}{dt} = L(t) = \frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{s} \Big(\frac{\partial \tilde{S}}{\partial q_i}\, \dot{q}_i + \frac{\partial \tilde{S}}{\partial q_{i0}}\, \dot{q}_{i0} \Big) = \frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{s} p_i\, \dot{q}_i \ .$$

Dabei wurde berücksichtigt, daß $\dot{q}_{i0}$ verschwindet. Umordnen ergibt

$$\frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{s} p_i\, \dot{q}_i - L = 0 \ ,$$

oder, wegen der Definition der Hamilton-Funktion:

$$\frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} + H(q_i, p_i, t) = 0$$

und wegen der obigen Beziehung für p_i:

$$\frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} + H\Big(q_i, \frac{\partial \tilde{S}}{\partial q_i}, t \Big) = 0 \ .$$

Die Wirkungsfunktion $\tilde{S}(q_i, q_{i0}, t)$ ist also ein vollständiges Integral der Hamilton-Jacobi-Gleichung, denn sie enthält s anpaßbare Konstanten q_{i0}. Aus ihr lassen sich umgekehrt wieder die Bahngleichungen gewinnen. Die s Ableitungen

$$\frac{\partial \tilde{S}}{\partial q_{i0}} = -\, p_{i0} = f_i(q_j, q_{j0}, t)$$

lassen sich nämlich nach den s Koordinaten q_j auflösen, und man erhält

$$q_j = q_j(q_{i0}, p_{i0}, t)$$

als Funktion der Anfangsbedingungen und der Zeit. Die s Impulse ergeben sich aus

$$p_i = \frac{\partial \tilde{S}}{\partial q_i} = g_i(q_j, q_{j0}, t)$$

durch Einsetzen der Ausdrücke für $q_j(q_{i0}, p_{i0}, t)$.

Für die oben berechnete Wirkungsfunktion des harmonischen Oszillators ergibt sich

$$\frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} = \frac{m\omega^2}{2} \frac{2q\, q_0 \cos(\omega t) - q^2 - q_0^2}{\sin^2(\omega t)} \quad , \quad \frac{\partial \tilde{S}}{\partial q} = m\omega \, \frac{q \cos(\omega t) - q_0}{\sin(\omega t)}$$

$$\rightarrow \quad \frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial \tilde{S}}{\partial q} \right)^2 + \frac{m\omega^2}{2} q^2 = 0 \ ,$$

die Hamilton-Jacobi-Gleichung ist also erfüllt. Die Koordinate $q(t)$ folgt dann aus

$$\frac{\partial S}{\partial q_0} = -p_0 = -m\omega \, \frac{q - q_0 \cos(\omega t)}{\sin(\omega t)} \quad \rightarrow \quad q(t) = q_0 \cos(\omega t) + \frac{p_0}{m\omega} \sin(\omega t)$$

und der Impuls $p(t)$ durch Einsetzen von $q(t)$ in die obige Beziehung:

$$p = \frac{\partial \tilde{S}}{\partial q} = -m\omega q_0 \sin(\omega t) + p_0 \cos(\omega t) \ .$$

Führt man eine kanonische Transformation mit der Wirkungsfunktion $\tilde{S}(q_i, q_{i0}, t)$ als Erzeugender vom Typ $F_1(q_i, Q_i, t)$ aus, so ist zunächst

$$Q_i = q_{i0} \ .$$

Weiter gilt nach den Transformationsgleichungen:

$$P_i = -\frac{\partial \tilde{S}}{\partial Q_i} = -\frac{\partial \tilde{S}}{\partial q_{i0}} = p_{i0} \ .$$

Die Transformation führt also auf die zeitlich konstanten Anfangswerte q_{i0}, p_{i0} als neue Variablen Q_i, P_i.

Für den harmonischen Oszillator lauten die Transformationsgleichungen mit $Q = q_0$:

$$p = +\frac{\partial \tilde{S}}{\partial q} = m\omega \, \frac{q \cos(\omega t) - Q}{\sin(\omega t)} \quad , \quad P = -\frac{\partial \tilde{S}}{\partial Q} = m\omega \, \frac{q - Q \cos(\omega t)}{\sin(\omega t)} \ .$$

Durch Auflösen nach Q und P ergibt sich:

$$Q = q \cos(\omega t) - \frac{p}{m\omega} \sin(\omega t) \quad , \quad P = m\omega \, q \sin(\omega t) + p \cos(\omega t) \ .$$

Macht man $m\omega$ zu 1, was ohne Beschränkung der Allgemeinheit durch passende Wahl der Einheiten geschehen kann, so stellt die Transformation offensichtlich eine Rotation des neuen Bezugssystems Q, P mit der Winkelgeschwindigkeit ω im Phasenraum dar. Durch Einsetzen der $q(t), p(t)$ des Systems in die obige Beziehung für Q und P folgt dann:

$$Q \equiv q_0 \quad , \quad P \equiv p_0 \ ,$$

im mitrotierenden System der Variablen Q, P nimmt der der repräsentative Punkt also die feste Lage q_0, p_0 ein.

Da alle neuen Koordinaten und alle neuen Impulse zyklisch sind, müssen alle alle neuen Impulse und alle neuen Koordinaten Bewegungsintegrale sein. In der Tat folgt aus den Transformationsgleichungen:

$$Q_i = Q_i(q_j, p_j, t) \equiv q_{i0} \quad , \quad P_i = P_i(q_j, p_j t) \equiv p_{i0} \ ,$$

wenn man für q_j und p_j die Bahn $q_j(q_{i0}, p_{i0}, t), p_j(q_{i0}, p_{i0}, t)$ einsetzt. Man kommt so zu $2s$ unabhängigen Bewegungsintegralen, von denen jeweils s in Involution stehen. Zu ihrer Berechnung muß allerdings die Phasenbahn des Systems schon bekannt sein.

Für den harmonischen Oszillator folgt aus den Bahngleichungen

$$q(t) = q_0 \cos(\omega t) + \frac{p_0}{m\omega} \sin(\omega t) \quad , \quad p(t) = -\, m\omega\, q_0 \sin(\omega t) + p_0 \cos(\omega t)$$

durch Auflösen nach den Anfangswerten:

$$q_0(q,p,t) = q \cos(\omega t) - \frac{1}{m\omega}\, p \sin(\omega t) \quad , \quad p_0(q,p,t) = m\omega\, q \sin(\omega t) + p \cos(\omega t) \ .$$

Außer von q und p hängen q_0 und p_0 auch noch explizit von der Zeit t ab, sie sind also keine Erhaltungsgrößen. Es gilt aber:

$$\begin{aligned}
\frac{dq_0}{dt} &= \frac{\partial q_0}{\partial t} + [q_0, H] \\
&= -\,\omega\, q \sin(\omega t) - \frac{p}{m} \cos(\omega t) + \left[q \cos(\omega t) - \frac{p}{m\omega} \sin(\omega t), \frac{1}{2m}\, p^2 + \frac{m\omega^2}{2}\, q^2 \right] \\
&= -\,\omega\, q \sin(\omega t) - \frac{p}{m} \cos(\omega t) + \frac{p}{m} \cos(\omega t) + \omega\, q \sin(\omega t) \equiv 0 \ .
\end{aligned}$$

q_0 ist also ein Bewegungsintegral. Die Rechnung für p_0 verläuft analog.

Die Wirkungsfunktion erfüllt die Forderungen an eine erzeugende Funktion für eine kanonische Transformation, die alle Variablen zu Konstanten, nämlich zu ihren Anfangswerten, macht, ist aber für die Lösung des dynamischen Problems unbrauchbar, da sie zu ihrer Berechnung die Kenntnis der Phasenbahnen, also eben diese Lösung, voraussetzt. Man muß daher auf unabhängigem Wege Integrale der Hamilton-Jacobi-Gleichung finden. Da aber die Lösungsmannigfaltigkeit von partiellen Differentialgleichungen sehr viel größer als die von gewöhnlichen Differentialgleichungen ist, läßt sich aus einem vollständigen Integral nicht jede Lösung durch Anpassung der Integrationskonstanten gewinnen. Das Theorem von Jacobi zur Integration der Hamilton-Jacobi-Gleichung besagt nun, daß jedes vollständige Integral die gleichen Dienste leistet wie die Wirkungsfunktion:

> Jedes vollständige Integral der Hamilton-Jacobi-Gleichung erzeugt eine kanonische Transformation auf konstante Variablen und liefert die Bahngleichungen.

Benutzt man die Lösung $S(q_i, \alpha_i, t)$ der Hamilton-Jacobi-Gleichung als Erzeugende einer kanonischen Transformation, so verschwindet nämlich die neue Hamilton-Funktion identisch. Deutet man die Integrationskonstanten α_i als neue Koordinaten, so folgt für die ebenfalls konstanten neuen Impulse aus den Transformationsgleichungen:

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = f_i(q_j, \alpha_j, t) \equiv \beta_i \ .$$

Dieses System von s Gleichungen läßt sich nach den q_j auflösen:

$$q_j = q_j(\alpha_i, \beta_i, t) \ ,$$

das sind aber wieder die Bahngleichungen. Die α_i, β_i werden allerdings im allgemeinen nicht mehr die Anfangswerte der q_i, p_i sein.

Zur Lösung partieller Differentialgleichungen gibt es allgemeine Verfahren wie die Charakteristiken-Methode. Bei ihr wird die partielle Differentialgleichung ersetzt durch ein gekoppeltes System gewöhnlicher Differentialgleichungen. Im Falle der Hamilton-Jacobi-Gleichung sind das im wesentlichen die kanonischen Gleichungen, so daß man auf diese Weise wieder auf das ursprüngliche Problem zurückkommt.

Für autonome Systeme, deren Hamilton-Funktion also nicht explizit von der Zeit abhängt:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0$$

und daher ein Bewegungsintegral mit dem Wert E ist, nimmt mit dem Ansatz:

$$S(q_1, \ldots, q_s, t) = W(q_1, \ldots, q_s) - E\,t$$

die Hamilton-Jacobi-Gleichung die folgende Gestalt an:

$$H\Big(q_i, \frac{\partial W}{\partial q_i}\Big) = E\ .$$

Diese Gleichung wird verkürzte Hamilton-Jacobi-Gleichung, charakteristische Gleichung und manchmal, in Anlehnung an die Optik, Eikonalgleichung genannt; die Funktion W heißt entsprechend verkürzte Wirkungsfunktion, charakteristische Funktion oder Eikonal. Es handelt sich um eine partielle Differentialgleichung 1. Ordnung mit den s Variablen $q_1, \ldots, q_s$.

Bei der Hamilton-Jacobi-Gleichung für den harmonischen Oszillator:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + \frac{m\omega^2}{2}\,q^2 = 0$$

folgt mit dem obigen Separationsansatz als Eikonalgleichung:

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{dW}{dq}\right)^2 + \frac{m\omega^2}{2}\,q^2 = E\ .$$

Diese Differentialgleichung führt auf eine Quadratur:

$$W(q) = \int [2m(E - \frac{m\omega^2}{2}\,q^2)]^{1/2} dq = \frac{q}{2}\,[2m(E - \frac{m\omega^2}{2}\,q^2)]^{1/2} + \frac{E}{\omega}\arcsin\left(q\sqrt{m\omega^2/2E}\right)\ .$$

Damit ist die vollständige Funktion $S(q, E, t)$, die auch im allgemeinen Fall meist auch als Wirkungsfunktion bezeichnet wird,

$$S(q, E, t) = \frac{q}{2}\,[2m(E - \frac{m\omega^2}{2}\,q^2)]^{1/2} + \frac{E}{\omega}\arcsin\left(q\sqrt{m\omega^2/2E}\right) - E\,t\ .$$

Sie ist wieder ein vollständiges Integral der Hamilton-Jacobi-Gleichung, stimmt aber nicht mit der ursprünglichen Wirkungsfunktion $\tilde{S}(q, q_0, t)$ überein.

Durch Differenzieren nach der Integrationskonstanten $\alpha \mathrel{\hat{=}} E$ folgt

$$\frac{\partial S}{\partial E} = \frac{1}{\omega}\arcsin\left(q\sqrt{m\omega^2/2E}\right) - t = -\,t_0\ .$$

Daraus ergibt sich die gesuchte Koordinate q zu

$$q(t) = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}\sin[\omega(t - t_0)]\ .$$

Für den Impuls erhält man aus $p = \partial S/\partial q$ nach Einsetzen von $q(t)$:

$$p(t) = \sqrt{2mE}\cos[\omega(t - t_0)]\ .$$

Die neuen Variablen E und t_0 sind ebenfalls zeitlich konstant, aber nicht identisch mit q_0 und p_0:

$$q_0 = -\sqrt{2E/m\omega^2}\,\sin(\omega t_0) \quad , \quad p_0 = \sqrt{2mE}\,\cos(\omega t_0)\ .$$

Die physikalische Bedeutung von W läßt sich aus der Definition der Wirkungsfunktion ableiten:

$$\tilde{S} = \int_0^t L\,dt = \int_0^t \Big[\sum_{i=1}^s p_i\dot{q}_i - H\Big]dt \ .$$

Hier ist aber $H \equiv E$ ein Bewegungsintegral und daher

$$\tilde{S} = \sum_{i=1}^s \int_0^t p_i\dot{q}_i\,dt - E\,t = \sum_{i=1}^s \int p_i\,dq_i - E\,t \ .$$

Durch Vergleich mit der Definition von $\tilde{S}$ folgt dann

$$W(q_1,\ldots,q_s) = \sum_{i=1}^s \int p_i\,dq_i \ .$$

Die Elemente der Summe werden manchmal ebenfalls als Wirkungsintegrale bezeichnet.

Wählt man statt $S(q_i,\alpha_i,t)$ die Eikonalfunktion $W(q_i,\alpha_i)$ selbst als Erzeugende einer kanonischen Transformation vom Typ $F_2(q_i,P_i)$, so sind die neuen Impulse $P_i \equiv \alpha_i$ Bewegungsintegrale, die neuen Koordinaten Q_i also zyklisch. Wegen der Zeitunabhängigkeit von W ändert sich der Wert der Hamilton-Funktion nicht:

$$K = H(P_i) \ ,$$

und die neuen kanonischen Bewegungsgleichungen sind:

$$\dot{Q}_i = +\frac{\partial H}{\partial P_i} \quad , \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial H}{\partial Q_i} = 0 \ .$$

H ist wegen seiner Zeitunabhängigkeit selbst ein Bewegungsintegral:

$$H(P_i) = H(\alpha_i) = E(\alpha_i) \ .$$

Damit ergibt sich für die Koordinaten $Q_i(t)$:

$$\dot{Q}_i \equiv \frac{\partial E}{\partial \alpha_i} \quad \to \quad Q_i(t) = \beta_i + \frac{\partial E}{\partial \alpha_i}\,t \ ,$$

sie sind also lineare Funktionen der Zeit. Dasselbe Ergebnis erhält man auch aus den Transformationsformeln für Erzeugende vom Typ $F_2(q_i,P_i)$:

$$Q_i = \frac{\partial W}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial S}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial E}{\partial \alpha_i}\,t \quad \to \quad \beta_i = \frac{\partial S}{\partial \alpha_i} \ .$$

Meistens wird speziell $\alpha_1 = E$ gewählt und β_1 durch $-\,t_0$ ersetzt, dann ist

$$\frac{\partial W}{\partial E} = -\,t_0 + t \quad , \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_i} = \beta_i \ , \ i = 2,\ldots,s \ .$$

Diese s Gleichungen in q_i,α_i,β_i,t können nach den q_i aufgelöst werden:

$$q_i = q_i(\alpha_j,\beta_j,t)$$

und liefern wieder die Bahn. Die Gleichungen für $i=2,\ldots,s$ enthalten nur noch die Größen $q_1,\ldots,q_s,\alpha_1,\ldots,\alpha_s,\beta_2,\ldots,\beta_s$. Ihre Auflösung nach den q_i ergibt die $s-1$ Koordinaten:

$$q_i = q_i(q_1,\alpha_1,\ldots,\alpha_s,\beta_2,\ldots,\beta_s) \ .$$

In diesen Gleichungen tritt die Zeit t nicht mehr auf, sie liefern also die geometrische Bahnform. Die Variable q_1 spielt dabei die Rolle des Bahnparameters. Durch Einsetzen in die Gleichung für $i=1$ entsteht dann:

$$\frac{\partial W}{\partial E} = f(q_1, \alpha_1, \dots, \alpha_s, \beta_2, \dots, \beta_s) = t - t_0 \ .$$

Durch Auflösen nach q_1 erhält man damit:

$$q_1 = q_1(\alpha_1, \dots, \alpha_s, t_0, \beta_2, \dots, \beta_s, t)$$

und durch Einsetzen in die Gleichungen für $i=2, \dots, s$ die übrigen $q_i(t)$.

Die Eikonalgleichung für den eindimensionalen harmonischen Oszillator hat, wie oben gezeigt wurde, das vollständige Integral

$$W(q,E) = \frac{q}{2}\,[2m(E - \frac{m\omega^2}{2}\,q^2)]^{1/2} + \frac{E}{\omega}\ \arcsin(q\sqrt{m\omega^2/2E}) \ .$$

Benutzt man es als erzeugende Funktion vom Typ F_2, so sind die Transformationsformeln:

$$p = \frac{\partial W}{\partial q} = [2m(E - \frac{m\omega^2}{2}\,q^2)]^{1/2} \quad , \quad Q = \frac{\partial W}{\partial E} = \frac{1}{\omega}\ \arcsin(q\sqrt{m\omega^2/2E}) \ .$$

Die kanonische Transformation lautet dann:

$$Q = \frac{1}{\omega}\ \arcsin(m\omega q/\sqrt{p^2 + m^2\omega^2 q^2}) \quad , \quad P = \frac{1}{2m}\,p^2 + \frac{m\omega^2}{2}\,q^2 \equiv E \ .$$

Sie kann auch durch eine Funktion vom Typ F_1 (Legendre-Transformation) erzeugt werden:

$$F_1(q,Q) = W(q,P) - PQ = W(q,E) - EQ \ .$$

Durch Einsetzen ergibt sich nach einigen Umrechnungen:

$$F_1(q,Q) = \frac{m\omega}{2}\,q^2 \cot(\omega Q) \ .$$

Dieses Ergebnis war schon früher benutzt worden. Die Bahngleichung folgt jetzt aus:

$$\frac{\partial W}{\partial E} = -\,t_0 + t = \frac{1}{\omega}\ \arcsin(q\sqrt{m\omega^2/2E})$$

durch Auflösen nach q:

$$q(t) = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}\ \sin[\omega(t - t_0)]$$

in Übereinstimmung mit dem früheren Ergebnis.

Wenn die Hamilton-Funktion des Systems explizit von der Zeit abhängt, ist sie kein Bewegungsintegral mehr, und die Separation von t und q_i ist nicht mehr möglich. Auch für relativ einfache Systeme wird die Integration der Hamilton-Jacobi-Gleichung dann in der Regel schwierig.

Wenn sich ein Massenpunkt unter dem Einfluß einer zeitabhängigen äußeren Kraft bewegt, läßt sich seine Bewegungsgleichung sofort integrieren; zum Beispiel erhält man für

$$m\,\ddot{x} = A\sin(\omega t)$$

mit den Anfangsbedingungen $x(0) = x_0$, $p(0) = p_0$ als Bahngleichung

$$x(t) = x_0 + \frac{1}{m}\big(p_0 + \frac{A}{m\omega}\big)\,t - \frac{A}{m\omega^2}\sin(\omega t) \ .$$

Die Kraft folgt hier aus dem zeitabhängigen Potential

$$V(x,t) = -\,A\,x\,\sin(\omega t) \ ,$$

für die Hamilton-Funktion ergibt sich damit

$$H = \frac{1}{2m}\,p^2 - A\,x\,\sin(\omega t)$$

und für die Hamilton-Jacobi-Gleichung

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 - A\,x\,\sin(\omega t) = 0\ .$$

Sie läßt sich nicht in der üblichen Weise separieren, aus der bekannten Bahn $x(t)$ kann man aber in der gleichen Weise wie beim Beispiel des harmonischen Oszillators die Wirkungsfunktion $\tilde{S}$ berechnen:

$$\tilde{S}(x, x_0, t) = -\frac{A^2}{8m\omega^3}\,[2\omega t + \sin(2\omega t)] - \frac{A}{\omega}\,x\cos(\omega t) + \frac{Ax_0}{\omega} + \frac{m}{2t}\,[\,x - x_0 + \frac{A}{m\omega^2}\sin(\omega t)]^2$$

und verifizieren, daß sie ein vollständiges Integral der Hamilton-Jacobi-Gleichung ist. Andererseits ergibt sich aus der Bewegungsgleichung direkt ein Bewegungsintegral:

$$\alpha(x, p, t) = p + \frac{A}{\omega}\cos(\omega t)\ .$$

Durch Auflösen nach p folgt daraus

$$p = \alpha - \frac{A}{\omega}\cos(\omega t) = \frac{\partial S}{\partial x} \quad \to \quad S = \alpha\,x - \frac{A}{\omega}\,x\cos(\omega t) + f(t)$$

und durch Einsetzen von S in die Hamilton-Jacobi-Gleichung

$$\frac{df}{dt} + \frac{1}{2m}[\,\alpha - \frac{A}{\omega}\cos(\omega t)]^2 = 0\ .$$

Diese Gleichung läßt sich direkt integrieren:

$$f(t) = -\left(\frac{\alpha^2}{2m} + \frac{A^2}{4m\omega^2}\right)t + \frac{\alpha\,A}{m\omega^2}\sin(\omega t) - \frac{A^2}{4m\omega^2}\sin(\omega t)\cos(\omega t)\ ,$$

und für S erhält man damit schließlich:

$$S(x, \alpha, t) = -\frac{A^2}{8m\omega^3}\,[2\omega t + \sin(2\omega t)] - \frac{A}{\omega}\,x\cos(\omega t) + \alpha\,[\,x + \frac{A}{m\omega^2}\sin(\omega t)] - \frac{\alpha^2}{2m}\,t\ .$$

Die Bahngleichung $x(t)$ ergibt sich einerseits aus $\tilde{S}$:

$$\frac{\partial \tilde{S}}{\partial x_0} = -p_0 = \frac{A}{\omega} - \frac{m}{t}\,[\,x - x_0 + \frac{A}{m\omega^2}\sin(\omega t)]\ ,$$

in Übereinstimmung mit der Ausgangsformel, andererseits aus S:

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} = \beta = x + \frac{A}{m\omega^2}\sin(\omega t) - \frac{\alpha}{m}\,t\ .$$

Durch Vergleich erhält man $\alpha = p_0 + A/\omega$, $\beta = x_0$.

2. Separation der Hamilton-Jacobi-Gleichung

Für autonome Systeme mit einem Freiheitsgrad ($s = 1$) läßt sich nach der Abseparation der Zeit die verkürzte Hamilton-Jacobi-Gleichung durch eine Quadratur lösen:

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2 + V(q) = E \quad \to \quad W(q, E) = \int \sqrt{2m\,[E - V(q)]}\,dq\ .$$

Für Systeme mit mehreren Freiheitsgraden ($s \geq 2$) versucht man, weitere Separationen zu erreichen. Wenn es gelingt, in einem geeigneten Koordinatensystem die Hamilton-Funktion in die folgende Form zu bringen:

$$H = H(q_1, \ldots, q_{s-1}, p_1, \ldots, p_{s-1}, f(q_s, p_s), t)\ ,$$

führt der Separationsansatz

$$S = \bar{S}(q_1, \ldots, q_{s-1}, t) + W_s(q_s)$$

dazu, daß die Hamilton-Jacobi-Gleichung die Gestalt annimmt:

$$\frac{\partial \bar{S}}{\partial t} + H\Big(q_1, \ldots, q_{s-1}, \frac{\partial \bar{S}}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial \bar{S}}{\partial q_{s-1}}, f\Big(q_s, \frac{\partial W_s}{\partial q_s}\Big), t\Big) = 0 \ .$$

Wenn man diese Gleichung nach f auflöst:

$$f\Big(q_s, \frac{\partial W_s}{\partial q_s}\Big) = F\Big(q_1, \ldots, q_{s-1}, \frac{\partial \bar{S}}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial \bar{S}}{\partial q_{s-1}}, t, \frac{\partial \bar{S}}{\partial t}\Big) \ ,$$

hängt die linke Seite nur von der Variablen q_s, die rechte nur von $q_1, \ldots, q_{s-1}, t$ ab. Das ist nur möglich, wenn beide Seiten derselben Konstanten α_s (Separationskonstante) gleich sind:

$$f\Big(q_s, \frac{\partial W_s}{\partial q_s}\Big) \equiv \alpha_s \ .$$

Diese Gleichung kann man nach dW_s/dq_s auflösen und erhält eine gewöhnliche Differentialgleichung, die sich durch eine Quadratur integrieren läßt:

$$\frac{\partial W_s}{\partial q_s} = g(q_s, \alpha_s) \quad \to \quad W_s(q_s, \alpha_s) = \int g(q_s, \alpha_s)\, dq_s \ .$$

Das Einsetzen der Lösung $W_s(q_s, \alpha_s)$ in die Hamilton-Jacobi-Gleichung führt dann zu:

$$\frac{\partial \bar{S}}{\partial t} + H\Big(q_1, \ldots, q_{s-1}, \frac{\partial \bar{S}}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial \bar{S}}{\partial q_{s-1}}, \alpha_s, t\Big) = 0 \ .$$

Die Fortsetzung des Verfahrens für weitere Freiheitsgrade ergibt für autonome Systeme bei vollständiger Separierbarkeit:

$$S(q_i, \alpha_i, t) = \sum_{i=1}^{s} W_i(q_i, \alpha_1, \ldots, \alpha_s) - E(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)\, t \ .$$

Häufig wird als α_1 die Größe E selbst gewählt.

Die Durchführbarkeit der Separation hängt sowohl vom betrachteten System, das integrabel sein muß, als auch vom verwendeten Koordinatensystem ab. Die Separationskonstanten haben eine unmittelbare physikalische Bedeutung. Die linke Seite der Separationsgleichung besagt nämlich:

$$f(q_s, p_s) \equiv \alpha_s \ .$$

Die Funktion $f(q_s, p_s)$ hat also für eine gegebene Bahn den zeitlich unveränderlichen Wert α_s, sie ist ein Bewegungsintegral. Das gilt natürlich auch für die Funktion $F(q_1, \ldots, q_{s-1}, p_1, \ldots, p_{s-1}, -H(\underline{q}, \underline{p}, t), t)$ auf der rechten Seite. Diese läßt sich jedoch durch die Bewegungsintegrale f und H ausdrücken, ist also nicht unabhängig von ihnen. Bei jeder Separation ergibt sich mit dem entsprechenden α_i ein weiteres Bewegungsintegral, das mit allen anderen in Involution steht. Bei vollständiger Separierbarkeit entsteht so ein Satz von s Bewegungsintegralen in Involution, von denen eines in der Regel die Energie E ist.

Ein wichtiger Sonderfall liegt vor, wenn die Koordinate q_s zyklisch ist. Dann gilt:

$$f(q_s, p_s) = p_s \equiv \alpha_s \quad \to \quad W_s(q_s) = \alpha_s\, q_s \ .$$

Das zugehörige Bewegungsintegral ist dann der zu q_s konjugierte Impuls p_s, und die Wirkungsfunktion S hat die Gestalt:

$$S(q_i, \alpha_i, t) = \bar{S}(q_1, \ldots, q_{s-1}, t) + \alpha_s \, q_s \ .$$

Nach seiner Definition stellt W allgemein die Erzeugende einer kanonische Transformation auf zyklische Koordinaten dar. Hier ist q_s aber schon zyklisch, bezüglich q_s erzeugen W und S ersichtlich die Identität.

Für einen Massenpunkt ($s = 3$), der sich in einem Potentialfeld $V(\mathbf{r})$ bewegt, hängt die Separabilität der Hamilton-Jacobi-Gleichung wesentlich vom gewählten Koordinatensystem ab.

a) $V(\mathbf{r}) = V(z)$

In kartesischen Koordinaten x, y, z ist die Hamilton-Funktion nach Umordnung:

$$H = \frac{1}{2m} \, p_x^2 + \frac{1}{2m} \, p_y^2 + [\frac{1}{2m} \, p_z^2 + V(z)]$$

und damit schon in drei Anteile vom Typ $f(q, dW/dq)$ zerlegt. Bewegungsintegrale sind offensichtlich wegen der Zeitunabhängigkeit H selbst (Gesamtenergie E), die Impulse p_x und p_y (x und y zyklisch) und die Energie der z-Bewegung:

$$H_z = \frac{1}{2m} \, p_z^2 + V(z) = E - \frac{1}{2m} \, (p_x^2 + p_y^2) = E_z \ .$$

Von ihnen sind nur drei, zum Beispiel p_x, p_y, E unabhängig, das vierte, hier E_z kann durch diese ausgedrückt werden. In Zylinderkoordinaten gilt für die Hamilton-Funktion:

$$H = \frac{1}{2m} \, (p_\rho^2 + \frac{1}{\rho^2} \, p_\varphi^2) + [\frac{1}{2m} \, p_z^2 + V(z)] \ .$$

Neben der Energie $H \equiv E$ ist hier $p_\varphi \equiv L_z$ eine Erhaltungsgröße (φ zyklisch) und ebenso wieder die Teilenergie $H_z \equiv E_z$, doch ist p_φ im Gegensatz zu E_z eine weitere unabhängige Erhaltungsgröße. Der Separationsansatz

$$W = \bar{W}(\rho, \varphi) + W_z(z) = W_\rho(\rho) + L_z \, \varphi + W_z(z)$$

ergibt für die ρ-Bewegung die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{1}{2m} \Big[\Big(\frac{\partial W_\rho}{\partial \rho} \Big)^2 + \frac{L_z^2}{\rho^2} \Big] = E - E_z \ ,$$

die durch eine Quadratur gelöst wird. Trotz seines etwas komplizierten Aussehens beschreibt das Eikonal

$$\bar{W}(\rho, \varphi) = \int \Big\{ 2m(E - E_z) - \frac{L_z^2}{\rho^2} \Big\}^{1/2} d\rho + L_z \, \varphi$$

nur die geradlinige Bewegung des Massenpunktes in der xy-Ebene. In Kugelkoordinaten ist die Hamilton-Jacobi-Gleichung nicht separabel.

b) $V(\mathbf{r}) = V(r)$

Für die Bewegung in einem Zentralfeld ist die Eikonalgleichung im allgemeinen Fall nur in Kugelkoordinaten separabel. Ausnahmen bilden das Kepler-Problem, das sich zusätzlich in parabolischen und elliptischen Koordinaten, und der harmonische Oszillator, der sich auch in kartesischen und Zylinderkoordinaten separieren läßt. Erhaltungsgrößen sind wegen der Symmetrie der Hamilton-Funktion

$$H = \frac{1}{2m}\,(p_r^2 + \frac{1}{r^2}\,p_\vartheta^2 + \frac{1}{r^2\sin^2\!\vartheta}\,p_\varphi^2) + V(r)$$

die Gesamtenergie und die z-Komponente des Drehimpulses. Da hier aber der gesamte Drehimpuls $\boldsymbol{L}$ erhalten bleibt, findet die Bewegung in einer zu ihm senkrechten Ebene statt, die man als xy-Ebene ($\vartheta \equiv \pi/2$) wählen kann. Das Problem reduziert sich damit auf ein zweidimensionales. Die Hamilton-Jacobi-Gleichung lautet dann:

$$\frac{1}{2m}\Big[\Big(\frac{\partial W}{\partial r}\Big)^2 + \frac{1}{r^2}\Big(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\Big)^2\Big] + V(r) = E$$

und führt mit dem Separationsansatz

$$W = W_r(r) + L\,\varphi$$

auf eine Quadratur:

$$W(r,\varphi) = \int \Big\{2m\,[E - V(r)] - \frac{L^2}{r^2}\Big\}^{1/2} dr + L\,\varphi$$

mit den Separationskonstanten E und L. Die Bahn folgt dann aus

$$\frac{\partial W}{\partial E} = t - t_0 = \int_{r_0}^{r} \Big\{\frac{2}{m}\,[E - V(r)] - \frac{L^2}{m^2 r^2}\Big\}^{-1/2} dr$$

$$\frac{\partial W}{\partial L} = \varphi_0 = \varphi - \int_{r_0}^{r} \Big\{\frac{2mr^4}{L^2}\,[E - V(r)] - r^2\Big\}^{-1/2} dr\ .$$

Aus der ersten Gleichung ergibt sich die Zeitabhängigkeit $r(t)$, aus der zweiten die Bahnkurve $r(\varphi)$ in Übereinstimmung mit den Ergebnissen in Kapitel B.

Falls die potentielle Energie von mehr als einer Koordinate abhängt, gibt es kein allgemeines Verfahren, und es muß der Einzelfall betrachtet werden.

Für die Bewegung eine geladenen Massenpunktes im Feld eines elektrischen Dipols ist die Hamilton-Funktion

$$H = \frac{1}{2m}\,(p_r^2 + \frac{1}{r^2}\,p_\vartheta^2 + \frac{1}{r^2\sin^2\!\vartheta}\,p_\varphi^2) + \frac{a}{r^2}\cos\vartheta$$

zyklisch in der Variablen φ, die z-Komponente des Drehimpulses bleibt also erhalten. Mit dem Separationsansatz

$$W = W_r(r) + W_\vartheta(\vartheta) + L_z\,\varphi$$

erhält man durch Einsetzen in die Hamilton-Jacobi-Gleichung und Erweitern mit $2mr^2$:

$$r^2\Big(\frac{\partial W_r}{\partial r}\Big)^2 - 2mE\,r^2 = 2ma\cos\vartheta - \frac{L_z^2}{\sin^2\!\vartheta} - \Big(\frac{\partial W_\vartheta}{\partial \vartheta}\Big)^2\ .$$

Die linke Seite hängt nur von r, die rechte nur von ϑ ab, beide müssen also derselben Konstanten α gleich sein. Die Größe

$$B = p_\vartheta^2 + \frac{1}{\sin^2\!\vartheta}\,p_\varphi^2 - 2ma\cos\vartheta$$

ist daher ein Bewegungsintegral mit dem Wert $-\,\alpha$, wie man auch mit dem Poisson-Klammer-Kriterium bestätigt. Die Eikonalfunktion ist dann

$$W = \int \sqrt{2mE - \frac{\alpha}{r^2}}\,dr + \int \sqrt{\alpha + 2ma\cos\vartheta - \frac{L_z^2}{\sin^2\!\vartheta}}\,d\vartheta + L_z\,\varphi\ .$$

Durch Differenzieren nach E, α und L_z erhält man drei Gleichungen, von denen die beiden letzteren allerdings auf elliptische Integrale führen.

Neben den kartesischen, Zylinder- und Kugelkoordinaten gehören zu den Koordinatensystemen mit Koordinatenflächen 1. oder 2. Grades auch noch die parabolischen und die elliptischen Koordinaten. Beide enthalten wie die Zylinder- und Kugelkoordinaten als Flächen 1. Ordnung die Halbebenen $\varphi \equiv const.$, die parabolischen Koordinaten zusätzlich zwei Scharen von konfokalen Rotationsellipsoiden um die z-Achse mit dem Ursprung als Brennpunkt, die elliptischen Koordinaten je eine konfokale Schar von Rotationsellipsoiden und Rotationshyperboloiden um die z-Achse mit zwei zum Ursprung symmetrischen Brennpunkten. Das ausgewählte Koordinatensystem sollte der Symmetrie des betrachteten dynamischen Systems angepaßt sein.

Die Überlagerung des Gravitationsfeldes einer Punktmasse und eines homogenen Feldes ergibt die potentielle Energie
$$V(r,z) = -\frac{\alpha}{r} + mg\,z\ .$$
Diese Problem ist weder in kartesischen noch in Zylinder- oder Kugelkoordinaten separabel, dagegen in parabolischen Koordinaten ξ, η, φ, die definiert sind durch
$$\xi = r + z = \sqrt{\rho^2 + z^2} + z \quad , \quad \eta = r - z = \sqrt{\rho^2 + z^2} - z \quad , \quad \varphi = \varphi$$
mit der Kehrtransformation auf Zylinderkoordinaten:
$$\rho = \sqrt{\xi\eta} \quad , \quad \varphi = \varphi \quad , \quad z = \frac{1}{2}(\xi - \eta)\ .$$
Aus der durch Umrechnung aus Zylinderkoordinaten erhaltenen Lagrange-Funktion
$$L = \frac{m}{8}\,(\xi+\eta)\Big(\frac{1}{\xi}\,\dot{\xi}^2 + \frac{1}{\eta}\,\dot{\eta}^2\Big) + \frac{m}{2}\,\xi\,\eta\,\dot{\varphi}^2 - V$$
ergeben sich die generalisierten Impulse
$$p_\xi = \frac{m}{4\xi}\,(\xi+\eta)\,\dot{\xi} \quad , \quad p_\eta = \frac{m}{4\eta}\,(\xi+\eta)\,\dot{\eta} \quad , \quad p_\varphi = m\,\xi\,\eta\,\dot{\varphi}$$
und damit die Hamilton-Funktion
$$H = \frac{2}{m(\xi+\eta)}\,(\xi\,p_\xi^2 + \eta\,p_\eta^2) + \frac{1}{2m\xi\eta}\,p_\varphi^2 + \frac{1}{\xi+\eta}\Big[\frac{mg}{2}(\xi^2 - \eta^2) - 2\alpha\Big]\ .$$
Die verkürzte Hamilton-Jacobi-Gleichung
$$\frac{2}{m(\xi+\eta)}\Big[\xi\Big(\frac{\partial W}{\partial \xi}\Big)^2 + \eta\Big(\frac{\partial W}{\partial \eta}\Big)^2\Big] + \frac{1}{2m\xi\eta}\Big(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\Big)^2 + \frac{1}{\xi+\eta}\Big[\frac{mg}{2}(\xi^2 - \eta^2) - 2\alpha\Big] = E$$
läßt sich mit dem Ansatz
$$W = W_\xi(\xi) + W_\eta(\eta) + L_z\,\varphi$$
separieren, denn nach Erweitern mit $(\xi + \eta)$ und Umordnen ergibt sich mit der üblichen Schlußweise:
$$\begin{aligned} &2\xi\Big(\frac{\partial W_\xi}{\partial \xi}\Big)^2 + \frac{L_z^2}{2\xi} + \frac{m^2 g}{2}\,\xi^2 - \alpha m - m\,E\,\xi = \\ &-\Big[2\eta\Big(\frac{\partial W_\eta}{\partial \eta}\Big)^2 + \frac{L_z^2}{2\eta} - \frac{m^2 g}{2}\,\eta^2 - \alpha m - m\,E\,\eta\Big] \equiv \beta\ . \end{aligned}$$
Im ersten Term tritt offensichtlich ein Bewegungsintegral der Form
$$\tilde{A}_z = \alpha m + m\,\xi\,H - 2\xi\,p_\xi^2 - \frac{1}{2\xi}\,p_\varphi^2 - \frac{m^2 g}{2}\,\xi^2$$
auf. Es läßt sich nach dem Einsetzen für H schreiben als
$$\tilde{A}_z = \frac{\xi - \eta}{2\xi\eta}\,p_\varphi^2 - \frac{2\xi\eta}{\xi+\eta}\,(p_\xi^2 - p_\eta^2) - \alpha m\,\frac{\xi-\eta}{\xi+\eta} - \frac{m^2 g}{2}\,\xi\eta$$
und hat den Wert $-\beta$. Die Umrechnung auf kartesische Koordinaten ergibt
$$\begin{aligned} \tilde{A}_z &= (p_x^2 + p_y^2)z - (xp_x + yp_y)p_z - \alpha m\,z\,(x^2+y^2+z^2)^{-1/2} - \frac{m^2 g}{2}\,(x^2+y^2) \\ &= A_z - \frac{m^2 g}{2}\,(x^2+y^2) = m^2 A - \alpha m\,z\,(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}\ . \end{aligned}$$

Dabei ist A_z die z-Komponente des Laplace-Runge-Lenz-Vektors für das Kepler-Problem, A die Erhaltungsgröße für einen Massenpunkt im homogenen Schwerefeld nach Kapitel C. Durch Ableitung nach E, L_z und β erhält man drei Gleichungen, die wieder auf elliptische Integrale führen. Die Bewegung erfolgt für gebundene Zustände ($E < 0$) in komplizierten, nichtgeschlossenen Bahnkurven, die ein ringförmiges Volumen zwischen je zwei Paraboloiden $\xi_a \leq \xi \leq \xi_b$ und $\eta_a \leq \eta \leq \eta_b$ ausfüllen.

In allen bisher betrachteten Fällen war es möglich, wenn auch manchmal erst im nachhinein, s Bewegungsintegrale in Involution anzugeben, wodurch die Integrabilität des Systems gesichert war. Das ist für nicht-integrable Systeme nicht mehr der Fall, hier läßt sich die Hamilton-Jacobi-Gleichung in keinem Koordinatensystem vollständig separieren.

Wenn ein Massenpunkt gleichzeitig von zwei Kraftzentren an den Orten $(x_1, 0)$ und $(x_2, 0)$ entsprechend dem Newtonschen Gravitationsgesetz angezogen wird, gilt für seine Bewegung in der gemeinsamen Ebene ($s=2$) die Hamiltonfunktion

$$H = \frac{1}{2m}\,(p_x^2 + p_y^2) - a_1\,[(x-x_1)^2 + y^2]^{-1/2} - a_2\,[(x-x_2)^2 + y^2]^{-1/2}\ .$$

Die zugehörige Hamilton-Jacobi-Gleichung läßt sich in elliptischen Koordinaten separieren, dabei tritt eine neue Erhaltungsgröße auf. Zusammen mit der Energie E bildet sie einen Satz s Bewegungsintegralen in Involution, das Problem ist also integrabel.

Beim eingeschränkten Dreikörperproblem bewegt sich ein Massenpunkt in einem Kraftfeld, das von zwei großen Massen erzeugt wird, die in einer Ebene starr mit der Winkelgeschwindigkeit ω um ihren Massenmittelpunkt rotieren. Wenn sie sich im mitbewegten Koordinatensystem an den Orten $(x_1, 0)$ und $(x_2, 0)$ befinden, ist die Hamilton-Funktion ($s=2$):

$$H = \frac{1}{2m}\,(p_x^2 + p_y^2) - \frac{m\omega^2}{2}\,(x^2 + y^2) - a_1\,[(x-x_1)^2 + y^2]^{-1/2} - a_2\,[(x-x_2)^2 + y^2]^{-1/2}\ .$$

Sie unterscheidet sich von der obigen nur um das Zusatzpotential

$$V_c = -\frac{m\omega^2}{2}\,(x^2 + y^2)$$

(Zentrifugalpotential). Da sie nicht explizit von der Zeit abhängt, ist sie selbst eine Erhaltungsgröße (Jacobi-Integral). Weitere Bewegungsintegrale existieren in diesem Fall jedoch nicht, das Problem ist nicht-integrabel.

3. Winkel- und Wirkungsvariable

Für gebundene Zustände verläuft die Bewegung des repräsentativen Punktes im Phasenraum vollständig in einem endlichen Bereich. Das System wird im folgenden als autonom vorausgesetzt ($\partial H/\partial t = 0$). Dann ist H eine Erhaltungsgröße mit dem Wert E, und es gilt

$$S = W(q_1, \ldots, q_s, \alpha_1, \ldots, \alpha_s) - E(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)\,t\ .$$

Bei einem eindimensionalen System ($s = 1$) hat das zur Folge, daß die Phasenbahn

$$H(q, p) \equiv E$$

eine wohldefinierte Kurve darstellt. Dabei sind zwei Fälle möglich:

a) Die Bewegung erfolgt in einem Intervall $q_a \leq q \leq q_b$, die Bahnkurve ist geschlossen. q und p sind periodische Funktionen der Zeit:

$$q(t+T) = q(t) \quad , \quad p(t+T) = p(t)\ .$$

Es handelt sich um eine Libration (Oszillation).

b) p ist eine periodische Funktion von q, während q mit der Zeit unbegrenzt anwächst:

$$p(q+2\pi) = p(q) \ .$$

Es handelt sich um eine Rotation.

Beide Bewegungstypen werden als periodisch bezeichnet. Sie können beim gleichen System für verschiedene Werte von E auftreten.

Für das ebene Pendel ist die Hamiltonfunktion

$$H = \frac{p^2}{2ml^2} - mgl\cos q \equiv E \ .$$

Für $E < mgl$ ergibt sich eine Libration, für $E > mgl$ eine Rotation (Fig. D1). Identifiziert man $q = +\pi$ mit $q = -\pi$, so erhält der Phasenraum die topologische Struktur einer Zylinderfläche. Im Sonderfall $E = mgl$ strebt das System in eine der Grenzlagen $q = \pm\pi$, ohne sie in endlicher Zeit zu erreichen.

Bei Systemen mit mehreren Freiheitsgraden ($s > 1$) kann man die Phasenbahn auf die verschiedenen Blätter q_i, p_i projizieren. Wegen

$$p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i} = p_i(q_1, \ldots, q_s, \alpha_1, \ldots, \alpha_s)$$

hängt p_i nicht nur von q_i, sondern auch von den übrigen $q_{j\neq i}$ ab, und es ergibt sich im allgemeinen Fall keine wohldefinierte Kurve. Falls die Hamilton-Jacobi-Gleichung aber im System der q_i vollständig separabel ist, läßt sich die Wirkungsfunktion S darstellen als

$$S(q_i, \alpha_i, t) = \sum_{i=1}^{s} W_i(q_i, \alpha_1, \ldots, \alpha_s) - E(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)\, t \ .$$

Die zu den q_i konjugierten Impulse ergeben sich aus

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} = \frac{\partial W_i}{\partial q_i} = p_i(q_i, \alpha_1, \ldots, \alpha_s)$$

und liefern die Projektion der Phasenbahn auf das Blatt q_i, p_i. Man erhält jetzt auf jedem Blatt wieder Bahnkurven vom Librations- oder Rotationstyp. Die Bewegung wird dann als bedingt-periodisch bezeichnet. Sie ist im allgemeinen nicht periodisch im üblichen Sinn, die Konfigurationsbahn ist also keine geschlossene Kurve.

Für den zweidimensionalen anisotropen harmonischen Oszillator ist die Hamilton-Funktion

$$H = \frac{1}{2m}\,(p_x^2 + p_y^2) + \frac{m\omega_x^2}{2}\,x^2 + \frac{m\omega_y^2}{2}\,y^2 = \big(\frac{1}{2m}\,p_x^2 + \frac{m\omega_x^2}{2}\,x^2\big) + \big(\frac{1}{2m}\,p_y^2 + \frac{m\omega_y^2}{2}\,y^2\big) \ .$$

Sie beschreibt zwei unabhängige Teilsysteme mit den Erhaltungsgrößen E_x und E_y. Auf den beiden Blättern (x, p_x) und (y, p_y) sind die Phasenbahnen Ellipsen, die mit den Perioden $2\pi/\omega_x$ und $2\pi/\omega_y$ durchlaufen werden. Die Bahn im Konfigurationsraum (x, y) ist dagegen eine Lissajous-Figur, die sich nur schließt, wenn das Verhältnis von ω_x und ω_y rational ist.

Umgekehrt lassen sich die W_i aus den p_i berechnen:

$$W_i(q_i, \alpha_1, \ldots, \alpha_s) = \int p_i(q_i, \alpha_1, \ldots, \alpha_s)\, dq_i \ .$$

Die Teilbewegungen, ob Librationen oder Rotationen, sind periodisch in q_i. Bei Rotationen kann man die q_i so normieren, daß sie bei jedem Umlauf um 2π zunehmen. Die Wirkungs- oder Phasenintegrale J_i werden dann in jedem Fall definiert durch

$$J_i(\alpha_1, \dots, \alpha_s) = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\partial W_i(q_i, \alpha_1, \dots, \alpha_s)}{\partial q_i}\, dq_i \ .$$

Da die Variablenpaare q_i, p_i voneinander unabhängig sind, gilt das auch für die J_i. Sie stellen also s unabhängige Funktionen der Bewegungsintegrale α_i dar und sind damit selber Bewegungsintegrale. Umgekehrt lassen sich auch die α_i durch die J_i ausdrücken:

$$\alpha_i = \alpha_i(J_1, \dots, J_s) \ ,$$

und durch Einsetzen ergibt sich

$$W_i = W_i(q_i, J_1, \dots, J_s) \ .$$

Das Bewegungsintegral H läßt sich entsprechend schreiben als

$$H = E(J_1, \dots, J_s) \ .$$

Für den Sonderfall einer zyklischen Winkelvariablen q_k ist p_k konstant. Es handelt sich um den Grenzfall einer Rotation mit beliebiger Periode. In diesem Fall wird die "natürliche" Periode 2π verwendet, und es folgt

$$J_k = p_k \ (= \alpha_k) \ .$$

Die verkürzte Wirkungsfunktion $W(\underline{q}, \underline{J})$ kann als Erzeugende einer kanonischen Transformation vom Typ $F_2(\underline{q}, \underline{P})$ benutzt werden. Dann sind die neuen Impulse J_i konstant und die neuen Koordinaten

$$w_i = \frac{\partial W}{\partial J_i}$$

zyklisch. Sie werden als Wirkungs- und Winkelvariable ("action and angle variables") bezeichnet. Die kanonischen Bewegungsgleichungen

$$\dot{w}_i = +\frac{\partial H}{\partial J_i} = \omega_i(J_1, \dots, J_s) \quad , \quad \dot{J}_i = -\frac{\partial H}{\partial w_i} \equiv 0$$

lassen sich direkt integrieren:

$$w_i = \omega_i\, t + \delta_i \ .$$

Die s Grundfrequenzen ω_i des Systems bei bedingt-periodischen Bewegungen ergeben sich dann unmittelbar aus

$$\omega_i = \frac{\partial E(J_1, \dots, J_s)}{\partial J_i} \ .$$

Sie lassen sich daher auch ohne Kenntnis der Bahn ermitteln.

Für den eindimensionalen harmonischen Oszillator ist die Hamilton-Funktion

$$H = \frac{1}{2m}\, p^2 + \frac{k}{2}\, q^2$$

ein Bewegungsintegral mit dem Wert E, daraus ergibt sich

$$p = \sqrt{2m(E - \frac{k}{2}\, q^2)}$$

und damit als Wirkungsintegral

$$J = \frac{1}{2\pi}\sqrt{mk}\oint\sqrt{\frac{2E}{k} - q^2}\,dq\ .$$

Das Integral ist ersichtlich gleich der Fläche eines Kreises mit dem Radius $r^2 = 2E/k$:

$$J = \sqrt{\frac{m}{k}}\,E \quad \rightarrow \quad E(J) = \sqrt{\frac{k}{m}}\,J\ .$$

Daraus folgt sofort als Periode der Librationsbewegung

$$\omega = \frac{\partial E}{\partial J} = \sqrt{\frac{k}{m}}\ ,$$

also unabhängig von der Energie E oder der Amplitude. Durch Ersetzung von E durch J und k durch ω ergibt sich

$$W(q,J) = \int\limits_0^q \sqrt{2m\omega J - m\omega^2 q^2}\,dq = \frac{q}{2}\sqrt{2m\omega J - m\omega^2 q^2} + J\arcsin\left(q\sqrt{\frac{m\omega}{2J}}\right)$$

und daraus wegen der obigen Beziehungen für die Winkelvariable w:

$$w = \omega t + \delta = \frac{\partial W}{\partial J} = \arcsin\left(q\sqrt{\frac{m\omega}{2J}}\right)$$

durch Auflösen nach q die Bahn:

$$q(t) = \sqrt{\frac{2J}{m\omega}}\,\sin(\omega t + \delta)\ .$$

Für die Berechnung der Bahn $q_i(t)$ bietet die Methode der Winkel- und Wirkungsvariablen keinen wesentlichen Vorteil, da auch hier die W_i als unbestimmte Integrale ausgewertet werden müssen. Interessiert man sich jedoch nur für die Perioden ω_i der Bewegung, so genügt die Berechnung von bestimmten Integralen über einen vollständigen Umlauf, die häufig wesentlich leichter durchzuführen ist.

Beim ebenen Pendel mit der Hamilton-Funktion

$$H = \frac{1}{2ml^2}\,p^2 - mg\,l\cos q \equiv E$$

wird das Wirkungsintegral

$$J = \frac{1}{2\pi}\oint\sqrt{2ml^2(E + mg\,l\cos q)}\,dq\ .$$

Es handelt sich um ein vollständiges elliptisches Integral 2. Gattung. Mit der Ersetzung

$$E = -mg\,l\cos q_m$$

der Energie E durch die maximale Auslenkung q_m ergibt sich

$$J(q_m) = \frac{8}{\pi}\,m\sqrt{l^3 g}\,\left[\mathrm{E}\big(\sin^2\frac{q_m}{2}\big) - \cos^2\frac{q_m}{2}\,\mathrm{K}\big(\sin^2\frac{q_m}{2}\big)\right]$$

als Linearkombination von vollständigen elliptischen Integralen zweiter und erster Gattung E und K in der Normalform. Führt man wieder die Energie E ein, so ist

$$J(E) = \frac{8}{\pi}\,m\sqrt{l^3 g}\,[\mathrm{E}\big(\frac{mg\,l + E}{2mg\,l}\big) - \frac{mg\,l - E}{2mg\,l}\,\mathrm{K}\big(\frac{mg\,l + E}{2mg\,l}\big)]$$

Diese Gleichung läßt sich nicht ohne weiteres nach E auflösen, aber die gewünschte Größe $\omega = dE/dJ$ kann man auch aus der Kehrfunktion $J(E)$ erhalten, denn

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\,\frac{dJ}{dE}\ ,$$

wobei man am einfachsten in der ursprünglichen Darstellung von J unter dem Integral differenziert:

$$\frac{dJ}{dE} = \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{ml^2}{2}}\int\limits_0^{q_m}\sqrt{E + mg\,l\cos q}\,dq = \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{l}{g}}\,\mathrm{K}\big(\sin^2\frac{q_m}{2}\big)$$

und damit wieder das frühere Ergebnis erhält.

Bei eindimensionalen Systemen ($s = 1$) stimmt ω mit der Frequenz der periodischen Bewegung $q(t)$ überein, für Systeme mit $s > 1$ Freiheitsgraden gilt das im allgemeinen nicht mehr.

Für das Zweikörperproblem mit der potentiellen Energie

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2}$$

durchläuft die Koordinate r einen Zyklus in der Zeit

$$T_r = 2 \int_{r_a}^{r_b} \left\{ \frac{2}{m} \left[E + \frac{\alpha}{r} - \frac{(L^2 - 2\beta m)}{2mr^2} \right] \right\}^{-1/2} dr = \pi\alpha \sqrt{\frac{m}{2|E|^3}} \ .$$

Die Zeit, in der die Koordinate φ um 2π zunimmt, schwankt dagegen zwischen den Extremen T_+ und T_- mit

$$T_\pm = T_r \left\{ \frac{1}{\pi} \arccos \left[\frac{\cos(\gamma\pi) \pm e}{1 \pm e\cos(\gamma\pi)} \right] \pm \frac{\gamma L}{\alpha} \sqrt{\frac{2|E|}{m}} \, \frac{e \sin(\gamma\pi)}{1 \pm e\cos(\gamma\pi)} \right\} \ .$$

Dabei stehen die Abkürzungen γ und e für

$$\gamma = \sqrt{1 + \frac{2m\beta}{L^2}} \quad , \quad e = \sqrt{1 + \frac{2\gamma^2 E L^2}{m\alpha^2}} \ .$$

Der Mittelwert über viele Zyklen ist

$$T_\varphi = \gamma T_r \quad \to \quad \omega_\varphi = \omega_r / \gamma \ .$$

Betrachtet man die Änderung der Winkelvariablen w_i bei einem vollständigen Umlauf der Variablen q_j, während die übrigen festgehalten werden, so gilt:

$$\begin{aligned} \Delta w_i &= \oint \frac{\partial w_i}{\partial q_j} \, dq_j = \oint \frac{\partial^2 W}{\partial q_j \partial J_i} \, dq_j = \oint \frac{\partial^2 W}{\partial J_i \partial q_j} \, dq_j \\ &= \frac{\partial}{\partial J_i} \oint p_j \, dq_j = 2\pi \, \frac{\partial J_j}{\partial J_i} = 2\pi \, \delta_{ij} \ . \end{aligned}$$

Sie ändert sich also bei einem Zyklus des zugehörigen q_i um 2π, bei Umläufen der übrigen q_j bleibt sie konstant. Sie ist daher eine mehrdeutige Funktion der q_j, umgekehrt lassen sich bei der Bewegung auf einer Bahn alle dynamischen Größen $f(\underline{q}, \underline{p})$ in eine Fourierreihe nach den w_i entwickeln:

$$f(\underline{q}(t), \underline{p}(t)) = \sum_{n_1 = -\infty}^{+\infty} \ldots \sum_{n_s = -\infty}^{+\infty} a_{n_1 \ldots n_s} e^{\imath (n_1 w_1 + \ldots + n_s w_s)} \ .$$

Im allgemeinen Fall gibt es keine Periode T, nach der eine solche Funktion wieder den gleichen Wert annimmt. Man bezeichnet die Bewegung deshalb als bedingt-periodisch. Das gilt auch für den Sonderfall, daß $f(\underline{q}, \underline{p}) = q_i$ eine der Koordinaten selbst ist. ω_i ist im allgemeinen nicht identisch mit der Frequenz der Bewegung von q_i, da bei dieser, im Gegensatz zur Definition von Δw_i, die übrigen q_j nicht festbleiben.

Im vorigen Beispiel ist $r(t)$ periodisch, $\varphi(t)$ aber, im Gegensatz zur Winkelvariablen $w(t)$, nicht.

Zu einer Periodizität im eigentlichen Sinn kommt es aber, wenn einige der Grundfrequenzen ω_i kommensurabel sind, wenn es also ganze Zahlen $n_1, \ldots, n_s$ gibt, so daß

$$n_1 \, \omega_1 + \ldots + n_s \, \omega_s = 0$$

gilt. Wenn m solche Beziehungen existieren:

$$\sum_{i=1}^{s} n_{ki}\,\omega_i = 0 \quad , \quad k = 1, \dots, m \ ,$$

spricht man von einer m-fachen, für $m = s-1$ von einer vollständigen Entartung des Systems. Im letzteren Fall sind alle ω_i Vielfache einer Grundfrequenz ω_0, und die Gesamtbewegung ist periodisch.

Die Bewegung eines anisotropen harmonischen Oszillators mit der Hamilton-Funktion

$$H = \frac{1}{2m}\,p_x^2 + \frac{m\omega_x^2}{2}\,x^2 + \frac{1}{2m}\,p_y^2 + \frac{m\omega_y^2}{2}\,y^2 + \frac{1}{2m}\,p_z^2 + \frac{m\omega_z^2}{2}\,z^2 \ ,$$

dessen Grundfrequenzen $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ in keinem rationalen Verhältnis stehen, ist bedingt-periodisch. Die Konfigurationsbahn, die in diesem Fall mit der geometrischen Bahn identifiziert werden kann, schließt sich nicht, sondern kommt nach hinreichend langer Zeit jedem Punkt eines dreidimensionalen Quaders beliebig nahe. Für einen isotropen Oszillator mit $\omega_x = \omega_y = \omega_z$ ist dagegen die Entartung vollständig und die geschlossene Bahnkurve eine Ellipse.

Wenn ein System m-fach entartet ist, also $n-m$ unabhängige Grundfrequenzen besitzt, kann man durch eine Punkttransformation auf ein neues System von Winkel- und Wirkungsvariablen $\bar{w}_i, \bar{J}_i$ übergehen, für das m Grundfrequenzen verschwinden. Die entsprechende erzeugende Funktion vom Typ F_2 hat die Gestalt:

$$F_2(w_i, \bar{J}_i) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{s} n_{ki} w_i\,\bar{J}_k + \sum_{k=m+1}^{2} w_k\,\bar{J}_k \ .$$

Damit ergeben sich aus den Transformationsformeln die neuen Koordinaten:

$$\bar{w}_k = \frac{\partial F_2}{\partial \bar{J}_i} = \begin{cases} \sum_{i=1}^{s} n_{ki} w_i \ , \ k = 1, \dots, m \\ w_k \quad , \quad k = m+1, \dots, s \end{cases}$$

und die neuen Grundfrequenzen:

$$\bar{\omega}_k = \begin{cases} \sum_{i=1}^{s} n_{ki}\,\omega_i = 0 \ , \ k = 1, \dots, m \\ \omega_k \quad , \quad k = m+1, \dots, s \end{cases}$$

Die neuen Wirkungsvariablen folgen aus:

$$J_i = \frac{\partial F_2}{\partial w_i} = \sum_{k=1}^{m} n_{ki}\bar{J}_k + \sum_{k=m+1}^{s} \delta_{ki}\bar{J}_k$$

durch Auflösen nach den $\bar{J}_k$. Wegen des Verschwindens von $\bar{\omega}_1, \dots, \bar{\omega}_m$ gelten die kanonischen Gleichungen:

$$\bar{\omega}_k = \frac{\partial H}{\partial \bar{J}_k} = 0 \quad , \quad k = 1, \dots, m \ .$$

Die Hamilton-Funktion hängt also nur noch von den $s-m$ verbleibenden Wirkungsvariablen ab:

$$H = H(\bar{J}_{m+1}, \dots, \bar{J}_s) \ ,$$

im Falle der vollständigen Entartung nur noch von $\bar{J}_s$.

Entartung und Separierbarkeit

Wenn für ein autonomes System die verkürzte Hamilton-Jacobi-Gleichung im Koordinatensystem der q_i vollständig separabel ist, treten bei der Separation s in Involution stehende Bewegungsintegrale (Erhaltungsgrößen)

$$\alpha_i(q_1,\ldots,q_s,p_1,\ldots,p_s) \quad , \quad i=1,\ldots,s$$

auf. Falls die Energie E nicht schon selbst eines der α_i ist, läßt sie sich durch diese ausdrücken:

$$E = E(\alpha_1,\ldots,\alpha_s) \ .$$

Durch eine bestimmte Wirkungsfunktion S beziehungsweise W wird eine s-parametrige Schar von Bahnen festgelegt. Die Ableitungen

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta_i$$

stellen dann weitere s Bewegungsintegrale dar, die zusammen mit den α_i eine bestimmte Bahn charakterisieren. Von ihnen können höchstens $s-1$ Erhaltungsgrößen sein. Wählt man als α_i speziell die Wirkungsvariablen J_i, so gilt:

$$E = E(J_1,\ldots,J_s) \ ,$$

und die Wirkungsfunktion hat die Gestalt:

$$S = W(q_1,\ldots,q_s,J_1,\ldots,J_s) - E(J_1,\ldots,J_s)\,t \ .$$

Den Bewegungsintegralen β_i entspricht dann ein Satz von Phasenkonstanten δ_i:

$$\frac{\partial S}{\partial J_i} = \delta_i \ ,$$

und für die Winkelvariablen w_i erhält man:

$$w_i = \frac{\partial W}{\partial J_i} = \frac{\partial E}{\partial J_i}\,t + \frac{\partial S}{\partial J_i} = \omega_i\,t + \delta_i \ .$$

Da der Anfangszeitpunkt t_0 bei autonomen Systemen willkürlich gewählt werden kann, sind nur Phasendifferenzen von Bedeutung. Von ihnen sind $s-1$ unabhängig, durch Elimination der Zeit erhält man statt der δ_i:

$$\gamma_i = \omega_k w_j - \omega_j w_k = \omega_k \delta_j - \omega_j \delta_k \ .$$

Insgesamt ergeben sich damit $2s-1$ Erhaltungsgrößen. Die $s-1$ neuen Erhaltungsgrößen werden damit durch die w_i ausgedrückt, aber wie diese sind sie mehrdeutige Funktionen der q_i, J_i beziehungsweise der q_i, p_i, denn Winkelvariable sind nur bis auf Vielfache von 2π bestimmt. Falls ω_j und ω_k nicht kommensurabel sind, kann man der Größe γ_i durch geeignete Wahl dieser Vielfachen Werte zuweisen, die jedem vorgegebenen Wert beliebig nahekommen. Ist dagegen das Verhältnis von ω_j und ω_k rational, lassen beide sich also als ganzzahlige Vielfache einer Frequenz ω_0 darstellen:

$$\omega_j = n_j\,\omega_0 \quad , \quad \omega_k = n_k\,\omega_0 \ ,$$

so stellt wegen der Periodizität des Sinus die Größe

$$\sin[(w_j\omega_k - w_k\omega_j)/\omega_0] = \sin(n_k w_j - n_j w_k)$$

ein zusätzliches eindeutiges Bewegungsintegral dar.

Wenn sich andererseits die Hamilton-Jacobi-Gleichung eines dynamischen Systems außer in den q_i auch in den davon in nicht-trivialer Weise verschiedenen $\bar{q}_i$ separieren läßt, treten bei der Separation in diesem weiteren Koordinatensystem zusätzliche eindeutige Bewegungsintegrale auf. Es besteht also ein Zusammenhang zwischen der Entartung, der Existenz zusätzlicher eindeutiger Bewegungsintegrale und der mehrfachen Separabilität.

Bei ihrer Librations- oder Rotationsbewegung nimmt jede Koordinate q_i im Verlauf der Zeit alle Werte zwischen zwei Extremwerten q_{ia}, q_{ib} beliebig oft an. Für ein nichtentartetes System kommt deshalb im Konfigurationsraum das Mobile jedem Punkt des s-dimensionalen Intervalls

$$q_{ia} \leq q_i \leq q_{ib} \quad , \quad i = 1, \ldots, s$$

beliebig nahe und füllt es daher aus. Das Koordinatensystem, in dem eine Separation möglich ist, ist daher bis auf triviale Unterschiede wie Maßstabsänderungen eindeutig bestimmt. Für ein m-fach entartetes System füllt dagegen das Mobile nur ein $(s-m)$-dimensionales Volumen aus, und die Separation ist in mehreren wesentlich verschiedenen Koordinatensystemen möglich.

Der anisotrope harmonische Oszillator ($k_x > k_y > k_z \to \omega_1 > \omega_2 > \omega_3$) stellt ein nichtentartetes System mit der Hamilton-Funktion

$$H = \frac{1}{2m}\, p_x^2 + \frac{m\omega_x^2}{2}\, x^2 + \frac{1}{2m}\, p_y^2 + \frac{m\omega_y^2}{2}\, y^2 + \frac{1}{2m}\, p_z^2 + \frac{m\omega_z^2}{2}\, z^2 \;,$$

dar, das sich in kartesischen Koordinaten separieren läßt. Dabei treten die Bewegungsintegrale E, E_z und E_y auf, wobei:

$$E_z = \frac{1}{2m}\, p_z^2 + \frac{k}{2}\, z^2 \quad , \quad E_y = \frac{1}{2m}\, p_y^2 + \frac{k}{2}\, y^2 \;.$$

Das Mobile füllt im Verlauf der Zeit ein quaderförmiges Volumen im Konfigrationsraum aus. Die Separation in kartesischen Koordinaten ist also die einzig mögliche.

Wenn zwei Kraftkonstanten gleich sind ($k_x = k_y = k \;\to\; \omega_x = \omega_y = \omega$), ist das System einfach entartet. Die Hamilton-Jacobi-Gleichung ist dann auch in Zylinderkoordinaten separabel. Wegen

$$H = \frac{1}{2m}\, p_\rho^2 + \frac{k}{2}\, \rho^2 + \frac{1}{2m\rho^2}\, p_\varphi^2 + \frac{1}{2m}\, p_z^2 + \frac{k_z}{2}\, z^2$$

treten bei der Separation die Bewegungsintegrale E, E_z und L_z mit:

$$L_z = p_\varphi = x\, p_y - y\, p_x$$

auf. Die Projektion der Bahn auf die xy-Ebene ist eine Ellipse, das Mobile füllt bei seiner Bewegung eine elliptische Zylinderfläche aus (Fig. D2).

Für den isotropen Oszillator ($k_x = k_y = k_z = k \;\to\; \omega_x = \omega_y = \omega_z = \omega$) liegt eine zweifache (vollständige) Entartung vor. Hier ist die Separation zusätzlich in Kugelkoordinaten möglich. Wegen:

$$H = \frac{1}{2m}\, p_r^2 + \frac{k}{2}\, r^2 + \frac{1}{2mr^2}\, p_\vartheta^2 + \frac{1}{2mr^2 \sin^2\vartheta}\, p_\varphi^2$$

treten bei der Separation die Bewegungsintegrale E, L_z und L^2 mit:

$$L^2 = p_\vartheta^2 + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\, p_\varphi^2$$

auf. Es entsteht eine geschlossene Bahn, nämlich eine Mittelpunktsellipse um das Kraftzentrum.

An die Stelle der Hamilton-Jacobi-Gleichung tritt in der Quantenmechanik die Schrödinger-Gleichung. Wenn das quantenmechanische System ein Gegenstück in der klassischen Mechanik besitzt, sind beide im gleichen Koordinatensystem separabel. Den dabei auftretenden s Bewegungsintegralen in Involution entsprechen s Observablen, deren Kommutator verschwindet.

Kepler-Problem in Winkel- und Wirkungsvariablen

Die Hamilton-Funktion lautet in Kugelkoordinaten:

$$H = \frac{1}{2m}\,(p_r^2 + \frac{1}{r^2}\,p_\vartheta^2 + \frac{1}{r^2\sin^2\!\vartheta}\,p_\varphi^2) - \frac{\alpha}{r}\ .$$

Daraus folgt für die verkürzte Hamilton-Jacobi-Gleichung:

$$\frac{1}{2m}\Big[\Big(\frac{\partial W}{\partial r}\Big)^2 + \frac{1}{r^2}\Big(\frac{\partial W}{\partial \vartheta}\Big)^2 + \frac{1}{r^2\sin^2\!\vartheta}\Big(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\Big)^2\Big] - \frac{\alpha}{r} = E\ .$$

Die Variable φ ist zyklisch, mit dem Separationsansatz

$$W = W_r(r) + W_\vartheta(\vartheta) + L_z\,\varphi$$

und der Separationskonstanten L ergibt sich

$$W_r = \int \Big[2m\Big(E + \frac{\alpha}{r} - \frac{L^2}{2mr^2}\Big)\Big]^{1/2} dr \quad , \quad W_\vartheta = \int \Big[L^2 - \frac{L_z^2}{\sin^2\!\vartheta}\Big]^{1/2} d\vartheta\ .$$

Diese Integrale lassen sich in geschlossener Form auswerten. Mit den Abkürzungen

$$r = -\frac{\alpha}{2E}(1+v) \quad , \quad \cos\vartheta = u \quad , \quad \beta^2 = 1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2} \quad , \quad \gamma^2 = 1 - \frac{L_z^2}{L^2}$$

ergeben sich die etwas unhandlichen Ausdrücke

$$\begin{aligned}
W_r &= -\alpha\sqrt{\frac{2m}{-E}}\int\frac{\sqrt{\beta^2 - v^2}}{(1+v)}\,dv \\
&= \alpha\sqrt{\frac{2m}{-E}}\Big\{\sqrt{1-\beta^2}\,\arcsin\Big[\frac{\beta^2 + v}{\beta(1+v)}\Big] - \arcsin\big(\frac{v}{\beta}\big) - \sqrt{\beta^2 - v^2}\Big\} \\
W_\vartheta &= -L\int\frac{\sqrt{\gamma^2 - u^2}}{(1+u)}\,du \\
&= L\Big\{\sqrt{1-\gamma^2}\,\arcsin\Big[\frac{u\sqrt{1-\gamma^2}}{\gamma\sqrt{1-u^2}}\Big] - \arcsin\big(\frac{u}{\gamma}\big)\Big\}\ .
\end{aligned}$$

Durch Differenzieren nach E, L^2 und L_z erhält man daraus Formeln für die Bahnkurve und den zeitlichen Verlauf der Bewegung, deren recht kompliziertes Aussehen von dem Umstand herrührt, daß die Bahnebene eine beliebige Lage im Raum einnehmen kann. Sie sollen hier nicht weiter betrachtet werden.

Für die Wirkungsintegrale als bestimmte Integrale über ein ausgezeichnetes Intervall ergeben sich dagegen recht einfache Ausdrücke. Wenn mit r_a, r_b und ϑ_a, ϑ_b die jeweils kleinsten und größten Werte dieser Variablen bezeichnet werden, folgt:

$$\begin{aligned}
J_r &= \frac{1}{\pi}\int_{r_a}^{r_b}\Big[2m\Big(E + \frac{\alpha}{r} - \frac{L^2}{2mr^2}\Big)\Big]^{1/2} dr = -L + \alpha\sqrt{\frac{m}{-2E}} \\
J_\vartheta &= \frac{1}{\pi}\int_{\vartheta_a}^{\vartheta_b}\Big[L^2 - \frac{L_z^2}{\sin^2\!\vartheta}\Big]^{1/2} d\vartheta = L - L_z \\
J_\varphi &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} L_z\,d\varphi = L_z\ .
\end{aligned}$$

Daraus erhält man durch Auflösen für die Energie als Funktion der Wirkungsintegrale:

$$E = -\frac{1}{2}\,\frac{m\alpha^2}{(J_r + J_\vartheta + J_\varphi)^2}\ .$$

Für die Grundfrequenzen $\omega_r, \omega_\vartheta$ und ω_φ ergibt sich dann

$$\omega_r = \omega_\vartheta = \omega_\varphi = \frac{m\alpha^2}{(J_r + J_\vartheta + J_\varphi)^3} = \omega\ .$$

Das System ist also zweifach (vollständig) entartet.

Da die Bewegung auf eine Ebene beschränkt ist, kann man diese zur xy-Ebene machen und so die Zahl der Freiheitsgrade auf $s=2$ verringern. Für die Eikonalfunktion erhält man dann nach Ersetzung von E und L_z durch J_r und J_φ:

$$W(r,\varphi) = \int^r \left[2m\left(\frac{\alpha}{r} - \frac{m\alpha^2}{2(J_r+J_\varphi)^2} - \frac{J_\varphi^2}{2mr^2}\right)\right]^{1/2} dr + J_\varphi\,\varphi\ .$$

Daraus ergibt sich für die Winkelvariable w_r:

$$w_r = \frac{\partial W}{\partial J_r} = \omega \int_{r_0}^{r} \left[\frac{2}{m}\left(\frac{\alpha}{r} - \frac{m\alpha^2}{2(J_r+J_\varphi)^2} - \frac{J_\varphi^2}{2mr^2}\right)\right]^{-1/2} dr\ .$$

Die zeitliche Veränderung von r folgt aus $w_r = \omega_r\,t + \delta_r = \omega\,t + \delta_r = \omega(t - t_0)$ durch Einsetzen für w_r:

$$t - t_0 = \int_{r_0}^{r} \left[\frac{2}{m}\left(\frac{\alpha}{r} - \frac{m\alpha^2}{2(J_r+J_\varphi)^2} - \frac{J_\varphi^2}{2mr^2}\right)\right]^{-1/2} dr\ .$$

Bis auf die Ersetzung von E und L_z durch J_r und J_φ ist das die gleiche Beziehung wie im Kapitel B. Die Bahnkurve folgt in entsprechender Weise aus w_φ:

$$w_\varphi = \frac{\partial W}{\partial J_\varphi} = \int_{r_0}^{r} \left(\omega - \frac{J_\varphi}{2mr^2}\right)\left[\frac{2}{m}\left(\frac{\alpha}{r} - \frac{m\alpha^2}{2(J_r+J_\varphi)^2} - \frac{J_\varphi^2}{2mr^2}\right)\right]^{-1/2} dr + \varphi\ .$$

Hier ist aber $w_r = \omega_\varphi\,t + \delta_\varphi = \omega\,t + \varphi_0 - \omega\,t_0$ und daher:

$$\varphi - \varphi_0 = \int_{r_0}^{r} \frac{J_\varphi}{2mr^2}\left[\frac{2}{m}\left(\frac{\alpha}{r} - \frac{m\alpha^2}{2(J_r+J_\varphi)^2} - \frac{J_\varphi^2}{2mr^2}\right)\right]^{-1/2} dr\ ,$$

ebenfalls wie im Kapitel B.

Im folgenden betrachten wir wieder den dreidimensionalen Fall ($s=3$) und numerieren die Koordinaten in der Reihenfolge φ, ϑ, r. Wegen der zweifachen Entartung ist:

$$\begin{aligned} k=1:&\quad \omega_\varphi - \omega_\vartheta = 0 \quad\to\quad n_{11} = 1\ ,\ n_{12} = -1\ ,\ n_{13} = 0 \\ k=2:&\quad \omega_\vartheta - \omega_r = 0 \quad\to\quad n_{21} = 0\ ,\ n_{22} = 1\ ,\ n_{23} = -1\ . \end{aligned}$$

Die Transformation auf die neuen Winkel- und Wirkungsvariablen $\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_r$ und $\bar{J}_1, \bar{J}_2, \bar{J}_3$ erfolgt mit der erzeugenden Funktion:

$$F_2(\underline{q}, \underline{P}) = (w_\varphi - w_\vartheta)\,\bar{J}_1 + (w_\vartheta - w_r)\,\bar{J}_2 + w_r\,\bar{J}_3$$

und führt zu den Transformationsgleichungen:

$$\begin{gathered} \bar{w}_1 = w_\varphi - w_\vartheta \quad,\quad \bar{w}_2 = w_\vartheta - w_r \quad,\quad \bar{w}_3 = w_r \\ J_\varphi = \bar{J}_1 \quad,\quad J_\vartheta = \bar{J}_2 - \bar{J}_1 \quad,\quad J_r = \bar{J}_3 - \bar{J}_s\ . \end{gathered}$$

Durch Auflösen ergeben sich daraus die neuen Wirkungsvariablen:

$$\bar{J}_1 = J_\varphi \quad , \quad \bar{J}_2 = J_\varphi + J_\vartheta \quad , \quad \bar{J}_3 = J_\varphi + J_\vartheta + J_r$$

und mit ihrer Hilfe die transformierte Hamilton-Funktion

$$H(\bar{J}_1, \bar{J}_2, \bar{J}_3) = \frac{m\alpha^2}{2\,\bar{J}_3^2} \ ,$$

die nur noch von der einen Wirkungsvarablen $\bar{J}_3$ abhängt. Die neuen Grundfrequenzen des Systems sind dann:

$$\bar{\omega}_1 = \frac{\partial H}{\partial \bar{J}_1} = 0 \quad , \quad \bar{\omega}_2 = \frac{\partial H}{\partial \bar{J}_2} = 0 \quad , \quad \bar{\omega}_3 = \frac{\partial H}{\partial \bar{J}_3} = \omega \ .$$

Die zeitliche Veränderung der neuen Winkelvariablen längs der Bahn wird gegeben durch:

$$\bar{w}_1 \equiv c_1 \quad , \quad \bar{w}_2 \equiv c_2 \quad , \quad \bar{w}_3 = \omega\, t + \delta \ .$$

Ihre geometrische Bedeutung erkennt man auf die folgende Weise:

a) $\bar{J}_1 = J_\varphi$ stellt die Komponente L_z des Drehimpulses in Richtung der raumfesten z-Achse dar. $\bar{w}_1$ ist daher ein fester (zeitlich unveränderlicher) Winkel in Bezug auf diese Achse, nämlich die "Länge des Knotens" Ω.

b) $\bar{J}_2 = J_\varphi + J_\vartheta$ ist der gesamte Drehimpuls L, dessen Achse normal zur Bahnebene steht. Der bezüglich dieser Achse feste Winkel $\bar{w}_2$ ist die "Länge des Perihels" ω.

c) Das Verhältnis $\bar{J}_1/\bar{J}_2 = L_z/L = \cos i$ liefert die Neigung der Bahnebene relativ zur Ekliptik, die "Inklination" i.

In der Himmelsmechanik werden $\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3, \bar{J}_1, \bar{J}_2, \bar{J}_3$ als Delaunay-Variable bezeichnet. Für eine ungestörte Planetenbahn sind fünf von ihnen Konstanten, die sechste, $\bar{w}_3$, eine lineare Funktion der Zeit. Aus $\bar{J}_1, \bar{J}_2$ und $\bar{J}_3$ lassen sich E, L^2 und L_z und damit die noch fehlenden Bahnelemente a (große Halbachse) und e (Exzentrizität) berechnen. Durch die von den anderen Planeten ausgeübten Bahnstörungen werden aus diesen Konstanten Größen, die sich mit der Zeit nur langsam verändern und deshalb besonders geeignet für die Störungsrechnung sind. Die gestörte Bahn wird dabei in jedem Zeitpunkt durch eine Kepler-Ellipse dargestellt, deren Bahnelemente aber Funktionen der Zeit sind (oskulierende Bahn).

Optomechanische Analogie

Eine anschauliche Deutung der Wirkungsfunktionen S und W ergibt sich auf die folgende Weise. Im Konfigurationsraum liegen für einen festen Satz von Parametern $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ alle Punkte, in denen $W(q_1, \ldots, q_s, \alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ den gleichen Wert a hat, auf einer $(s-1)$-dimensionalen Hyperfläche. Für verschiedene Werte von a bilden diese also eine s-parametrige Schar von Flächen, die sich nicht schneiden. Im Sonderfall $s = 3$, auf den wir uns im folgenden beschränken, kann man den Konfigurationsraum mit dem geometrischen Raum identifizieren. Für autonome Systeme gilt mit $\alpha_1 \hat{=} E$:

$$S = W(x, y, z, E, \alpha_2, \alpha_3) - E\,t \ .$$

Durch jeden Punkt des Raumes geht für festes E, α_2, α_3 genau eine Fläche mit $W \equiv a$.

Für einen Massenpunkt im homogenen Schwerefeld kann man in einem kartesischen Koordinatensystem $\bar{x}, \bar{y}, z$ als Parameter die Bewegungsintegrale $E, p_{\bar{x}}, p_{\bar{y}}$ verwenden. Dann ist die Eikonalfunktion:

$$W = p_{\bar{x}}\,\bar{x} + p_{\bar{y}}\,\bar{y} - \frac{1}{3m^2 g}\,[\,2m(E - mg\,z) - p_{\bar{x}}^2 - p_{\bar{y}}^2\,]^{3/2} \ .$$

Da $\bar{x}$ und $\bar{y}$ nur in der Kombination $p_{\bar{x}}\,\bar{x} + p_{\bar{y}}\,\bar{y}$ vorkommen, kann man bei festem $p_{\bar{x}}, p_{\bar{y}}$ neue Koordinaten x, y durch die Transformation (Drehung um die z-Achse):

$$x = (p_{\bar{x}}\,\bar{x} + p_{\bar{y}}\,\bar{y})/\bar{p} \quad , \quad y = (p_{\bar{x}}\,\bar{y} - p_{\bar{y}}\,\bar{x})/\bar{p}$$

mit $\bar{p}^2 = p_{\bar{x}}^2 + p_{\bar{y}}^2 = p^2 - p_z^2$ einführen. W wird dadurch unabhängig von y:

$$W = \bar{p}\,x - \frac{1}{3m^2 g}[\,2m(E - mg\,z) - \bar{p}^2\,]^{3/2} \ ,$$

und man kann sich auf die Schnittkurven der zur y-Achse parallelen zylindrischen W-Flächen mit der xz-Ebene beschränken. Für diese gilt:

$$z(x) = \frac{1}{mg}\left(E - \frac{\bar{p}^2}{2m}\right) - \left(\frac{9\bar{p}^2}{8m^2 g}\right)^{1/3}\left(x - \frac{a}{\bar{p}}\right)^{2/3} \ .$$

Setzt man zur Abkürzung $a/\bar{p} = x_0$ und $(2mE - \bar{p}^2)/2m^2 g = z_0$, so ergibt sich eine Schar von nach unten offenen Neilschen Parabeln, deren Spitzen alle die gleiche Scheitelhöhe z_0 haben, aber um das von a abhängige x_0 verschoben sind (Fig. D3).

Bei einem gegeben Satz von Parametern $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ beschreibt die Eikonalfunktion eine dreiparametrige Schar von Bahnen mit den Parametern $\beta_1, \beta_2, \beta_3$. Dabei legen β_2 und β_3 die Bahnkurve, β_1 den Anfangspunkt der Zeitzählung fest. Für den Impuls des Massenpunktes gilt nun

$$p_x = \frac{\partial W}{\partial x} \ , \ p_y = \frac{\partial W}{\partial y} \ , \ p_z = \frac{\partial W}{\partial z} \quad \to \quad \boldsymbol{p} = m\,\boldsymbol{v} = \nabla W \ .$$

Die Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ hat also die Richtung des Gradienten von W und steht damit senkrecht auf den W-Flächen. Die Teilchenbahnen durchsetzen daher die Schar der W-Flächen orthogonal (Orthogonaltrajektorien). Sie zeigen damit das gleiche Verhalten wie in der Elektrostatik die Feldlinien gegenüber den Äquipotentialflächen.

Für das obige Beispiel werden die Teilchenbahnen gegeben durch ($\alpha \mathrel{\hat{=}} \bar{p}, \beta \mathrel{\hat{=}} \bar{x}_0$):

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{p}} = \bar{x}_0 = x + \frac{\bar{p}}{m^2 g}\,[\,2m(E - mg\,z) - \bar{p}^2\,]^{1/2} \quad \to \quad z(x) = z_0 - \frac{m^2 g}{2\bar{p}^2}(x - \bar{x}_0)^2 \ .$$

Es handelt sich also um eine Schar von längs der x-Achse um $\bar{x}_0$ verschobenen Parabeln mit der für alle gleichen Scheitelhöhe z_0 (Fig. D4).

Um die zu einer gegebenen Kurvenschar orthogonale zu erhalten, muß zunächst diejenige Differentialgleichung bestimmt werden, deren Lösungen diese Kurven darstellen. Mit dem Scharparameter c ist

$$z = z(x, c) \ ,$$

daraus folgt durch Differenzieren nach x:

$$\frac{dz}{dx} = z'(x, c) \ .$$

Aus diesen beiden Gleichungen erhält man durch Elimination von c die Differentialgleichung

$$\frac{dz}{dx} = f(x, z) \ ,$$

die das Richtungsfeld der ursprünglichen Schar darstellt. Das dazu orthogonale Feld wird gegeben durch die Differentialgleichung

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{f(x, z)} \ ,$$

und ihre Integration liefert die Schar der Orthogonaltrajektorien mit der Integrationskonstanten als Scharparameter.

Beim obigen Beispiel unterscheiden sich die Kurven der Schar in der Abszisse x_0 ihrer Spitze:

$$z(x, x_0) = z_0 - \left(\frac{9\bar{p}^2}{8m^2 g}\right)^{1/3} (x - x_0)^{2/3} \quad \rightarrow \quad \frac{dz}{dx} = -\frac{2}{3}\left(\frac{9\bar{p}^2}{8m^2 g}\right)^{1/2} (x - x_0)^{-1/3} .$$

Daraus ergibt sich durch Elimination als Differentialgleichung der Schar

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{2}{3}\left(\frac{9\bar{p}^2}{8m^2 g}\right)^{1/2} (z_0 - z)^{-1/2} .$$

Die Differentialgleichung für die orthogonale Schar ist dann

$$\frac{dz}{dx} = +\frac{3}{2}\left(\frac{8m^2 g}{9\bar{p}^2}\right)^{1/2} (z_0 - z)^{1/2} .$$

Durch Trennung der Variablen ergibt sich mit der Integrationskonstanten $\bar{x}_0$

$$z = z_0 - \frac{m^2 g}{2\bar{p}^2} (x - \bar{x}_0)^2 .$$

Die Orthogonaltrajektorien stimmen also mit den Bahnkurven überein.

Bisher wurden die Parameter $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ festgehalten, dann geht durch jeden Punkt des Konfigurationsraumes eine Bahnkurve. Bei Variation der Parameter erhält man durch jeden Punkt eine s-parametrige Schar von Bahnen.

Hält man bei dem vorigen Beispiel die Energie E fest und variiert $\bar{p}$, so erhält man eine Schar von Wurfparabeln mit gleicher Anfangsgeschwindigkeit, aber verschiedenem Wurfwinkel. Wegen der Homogenität des Feldes kann man sich auf die Bahnen in der xz-Ebene durch den Ursprung beschränken, für diese gilt

$$z(x) = \sqrt{2mE - \bar{p}^2}\,\frac{x}{\bar{p}} - \frac{m^2 g}{2}\left(\frac{x}{\bar{p}}\right)^2 .$$

Sie bilden die Strahlen eines "Springbrunnens", der durch eine Rotationsfläche eingehüllt wird (Fig. D5). Wählt man als Parameter statt $\bar{p}$ die Größe $c = \sqrt{2mE - \bar{p}^2}/\bar{p}$, so erhält man die Enveloppe der Parabelschar

$$z - \psi(x, c) = z - c\,x + \frac{mg}{4E}\,(1 + c^2)\,x^2 = 0$$

durch Ableitung nach dem Scharparameter c:

$$-x + \frac{mg}{2E}\,c\,x^2 = 0$$

und Elimination von c aus diesen beiden Gleichungen

$$c = \frac{2E}{mg}\frac{1}{x} \quad \rightarrow \quad z(x, c(x)) = \frac{E}{mg} - \frac{mg}{4E}\,x^2 .$$

Es handelt sich also ebenfalls um eine Parabel.

Auch die S-Flächen haben eine geometrische Bedeutung. Wegen $S = W - E\,t$ stimmt die Fläche $S = b$ für einen bestimmten Zeitpunkt t_a mit der Fläche $W = b + E\,t_a = a$ überein. Die S-Flächen bilden also eine Schar von laufenden Flächen, die in jedem Zeitpunkt mit einer der W-Flächen zusammenfallen. Im Intervall dt bewegt sich die Fläche, die für t_a mit $W = a$ übereinstimmte, zur Fläche $W = a + E\,dt$. Andererseits gilt aber, wenn diese beiden W-Flächen den Abstand ds haben:

$$dW = |\nabla W|\,ds .$$

Daraus folgt für die Laufgeschwindigkeit der S-Fläche

$$v_w = \frac{ds}{dt} = \frac{E}{|\nabla W|} = \frac{E}{m\,v_p} \quad , \quad v_w\,v_p = \frac{E}{m} ,$$

wobei v_p die Geschwindigkeit des Massenpunktes auf seiner Bahn ist.

Für Materiewellen hat de Broglie entsprechend der Relativitätstheorie gefordert, daß

$$E = m\,c^2 \quad \rightarrow \quad v_w\,v_p = c^2 \ .$$

Für elektromagnetische Wellen in einem inhomogenen Medium mit dem Brechungsindex $n(x,y,z)$ gilt die Wellengleichung:

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} - \frac{n^2(x,y,z)}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = 0 \ .$$

Sie läßt sich mit dem Ansatz

$$\Psi(x,y,z,t) = e^{\imath\omega t}\psi(x,y,z)$$

separieren und ergibt die zeitunabhägige Gleichung:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} - k^2(x,y,z)\,\psi = 0 \ .$$

Dabei ist $k = 2\pi/\lambda = n\,\omega/c$ der Betrag des Wellenvektors. Mit dem weiteren Ansatz

$$\psi = \exp(\imath k W)$$

folgt im Grenzfall $k \to \infty$ ($\lambda \to 0$) als Grundgleichung der geometrischen Optik (Strahlenoptik) die Eikonalgleichung:

$$\Big(\frac{\partial W}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial W}{\partial y}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial W}{\partial z}\Big)^2 = n^2(x,y,z) \ .$$

Die Lichtstrahlen sind die Orthogonaltrajektorien der Schar der W-Flächen. Für das Kurvenintegral längs eines Strahls von der Fläche $W = a$ bis zur Fläche $W = b$ gilt

$$\Delta W = b - a = \int n(\boldsymbol{r})\,ds \ ,$$

die W-Flächen sind also Flächen gleicher optischer Weglänge. Andererseits lautet die verkürzte Hamilton-Jacobi-Gleichung

$$\Big(\frac{\partial W}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial W}{\partial y}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial W}{\partial z}\Big)^2 = 2m\,[E - V(x,y,z)] \ .$$

Man kann die Bahnen des Massenpunktes also deuten als Lichtstrahlen in einem inhomogenen Medium mit dem ortsabhängigen Brechungsindex:

$$n(\boldsymbol{r}) = \sqrt{2m\,[E - V(\boldsymbol{r})]} \ .$$

Die Strahlenoptik stellt den Grenzfall der Wellenoptik für verschwindende Wellenlänge dar. In der gleichen Weise läßt sich die klassische Mechanik ("Strahlenmechanik") deuten als Grenzfall einer Wellenmechanik für verschwindende Materiewellenlänge

$$\lambda = \frac{h}{p} \ .$$

Der zeitunabhängigen Wellengleichung entspricht dann die Gleichung

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} - \frac{4\pi^2}{h^2}\,2m\,[E - V(\boldsymbol{r})]\,\psi = 0 \ ,$$

oder nach Umschreibung mit dem Laplace-Operator ∇^2:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\,\nabla^2\psi + V(\boldsymbol{r})\,\psi = E\,\psi \ ,$$

also die zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung der Quantenmechanik.